

PCSI 2026-2027
DM n°1

Exercice 1 : On pose :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$, puis montrer que f est impaire.
- 2) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

- 3) En déduire les variations de f ainsi que les limites aux bornes de son ensemble de définition.
-

Définition (bijection) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: x \mapsto f(x)$ une fonction définie sur I . On note J l'ensemble des images prises par $f(x)$: $J = \{f(x) \text{ tel que } x \in I\}$. On peut noter $J = \text{Im}(f) = f(I)$.

On dit que f est bijective de I dans J si et seulement si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$:

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$$

On dit alors que f définit une bijection de I dans J .

- 4) En déduire que f réalise une bijection de $] - 1; 1[$ dans un ensemble à déterminer.
-

Définition (fonction réciproque) : Lorsque f est bijective, on peut alors définir sa réciproque, notée f^{-1} , appelé **bijection réciproque** de f et définie de J dans I par :

$$f^{-1}: \begin{matrix} J \rightarrow I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{matrix}$$

- 5) Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} puis déterminer f^{-1} .
- 6) Démontrer que : $g: x \mapsto e^x - e^{-x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis déterminer g^{-1} .

PCSI 2026-2027
DM n°1

Exercice 1 : On pose :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$, puis montrer que f est impaire.
- 2) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

- 3) En déduire les variations de f ainsi que les limites aux bornes de son ensemble de définition.
-

Définition (bijection) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: x \mapsto f(x)$ une fonction définie sur I . On note J l'ensemble des images prises par $f(x)$: $J = \{f(x) \text{ tel que } x \in I\}$. On peut noter $J = \text{Im}(f) = f(I)$.

On dit que f est bijective de I dans J si et seulement si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$:

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$$

On dit alors que f définit une bijection de I dans J .

- 4) En déduire que f réalise une bijection de $] - 1; 1[$ dans un ensemble à déterminer.
-

Définition (fonction réciproque) : Lorsque f est bijective, on peut alors définir sa réciproque, notée f^{-1} , appelé **bijection réciproque** de f et définie de J dans I par :

$$f^{-1}: \begin{matrix} J \rightarrow I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{matrix}$$

- 5) Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} puis déterminer f^{-1} .
- 6) Démontrer que : $g: x \mapsto e^x - e^{-x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis déterminer g^{-1} .