

TD 3 : Dérivation

Partie A : Avec la définition

Exercice A.1 : On pose $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$$

Exercice A.2 : On pose $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice A.3 : On pose $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Démontrer que :

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Partie B : Calcul de dérivée

Exercice B.1 : Etudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1: x \mapsto \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \quad f_2: x \mapsto (x + 2)e^x \quad f_3: x \mapsto \frac{1}{x^4 + x^2 + 5}$$

Exercice B.2 : Etudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1: x \mapsto (\cos(x))^3 \quad f_2: x \mapsto \sqrt{1 + x^2} \quad f_3: x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

Exercice B.3 : On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \sin(x)$$

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

Partie C : Application à la tangente

Exercice C.1 : On pose :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f_m: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x + m}{x^2 + 1} \end{cases}$$

On note C_m sa courbe représentative.

1) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.

2) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice C.2 : On pose :

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2} \end{cases}$$

Montrer que $(1; 0)$ est l'unique point de la courbe tel que la tangente en ce point soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Partie D : Etude de fonctions

Exercice D.1 : Etudier la fonction : $f : x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$

Exercice D.2 : 1) Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}}$$

2) Est-elle bornée ? Admet-elle des extrema locaux ou globaux sur son ensemble de définition ?

Exercice D.3 : On pose :

$$f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que f est impaire.
- 3) Etudier les variations de f et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice D.4 : Faire une étude complète (allure de la courbe aussi) de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Exercice D.5 : On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[\setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et inférieures.

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

b) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $]1; +\infty[$.

c) Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T_0) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

d) Prouver que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Exercice D.6 : On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et préciser sa parité.
- 2) Etudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
- 3) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque, notée g .
- 4) Donner l'ensemble de définition de g , son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
- 5) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
- 6) Expliciter la fonction g .

Partie E : Calcul de limites grâce à la dérivation

Exercice E.1 : Calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x} \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \ell_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}$$

Partie F : Application aux inégalités

Exercice F.1 : Démontrer que :

$$\forall x > 1, \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Exercice F.2 : Démontrer que :

$$\forall x > 0 \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Exercice F.3 : Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le nombre de solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$$

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $n!$, qui se lit « factoriel n » ou « n factoriel » par :

$$n! = 1 \times \dots \times n$$

Par exemple $1! = 1, 2! = 1 \times 2 = 2, 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6, 4! = 24, 5! = 120 \dots$