

TD 4 : Fonctions usuelles

Partie A : Les fonctions exponentielle, logarithme et puissances

Exercice A.1 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $2 \ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln(2) = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x+2)$

2) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

3) $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$

4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$

5) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

6) $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$

Exercice A.2 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} & b) \begin{cases} x + y = 7 \\ \log(x) + \log(y) = 1 \end{cases} \\ c) \begin{cases} xy = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{cases}, \text{ avec } a > 0 \text{ donnée } d) \begin{cases} x + y = 520 \\ \log(x) + \log(y) = 4 \end{cases} \end{array}$$

Exercice A.3 : Démontrer que :

$$\forall x \in]0; 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Exercice A.4 :

a) Montrer que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

b) Interprétez graphiquement l'inégalité de droite.

Exercice A.5 : Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x)) & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x - 1} \\ d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \quad (1 < a < b) & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} \end{array}$$

Exercice A.6 : a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. Interpréter ce résultat graphiquement.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$, en déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

c) En déduire l'encadrement suivant du nombre e pour $n \geq 1$:

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$

d) En déduire :

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice A.7 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[\setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et inférieures.

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

b) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $]1; +\infty[$.

- c) Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T_0) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
 d) Prouver que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Exercice A.8 : On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et préciser sa parité.
- 2) Etudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
- 3) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque, notée g .
- 4) Donner l'ensemble de définition de g , son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
- 5) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
- 6) Expliciter la fonction g .

Exercice A.9 : On pose :

$$f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que f est impaire.
- 3) Etudier les variations de f et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice A.10 : Démontrer que :

$$\forall x > 1, \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Exercice A.11 : Démontrer que :

$$\forall x > 0 \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Exercice A.12 : Etudier les fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)$
- 2) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 3}$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}$
- 4) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$
- 5) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
- 6) $f(x) = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$
- 7) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
- 8) $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$
- 9) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ (où $a > 0$)
- 10) $f(x) = \sqrt{x^2 \frac{3a-x}{a+x}}$ (où $a > 0$)
- 11) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$

Partie B : Fonction trigonométrique

Exercice B.1 : Montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice B.2 : Résoudre les équations suivantes, de variable x réelle :

- a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- b) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$
- c) $2 \cos(2x) = \sqrt{3}$
- d) $2 \cos^2(2x) - 3 \cos(2x) = -1$
- e) $\cos(2x) = \cos(x)$
- f) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$
- g) $\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$
- h) $\cos(3x) + \sin(x) = 0$

Exercice B.3 : Résoudre les inéquations suivantes, de variable x réelle :

- a) $\cos(x) > 0$
- b) $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$
- c) $\tan(x) > \frac{\sqrt{3}}{3}$
- d) $\sin^2(x) \geq \frac{1}{4}$ sur $[\pi; \pi]$

Exercice B.4 : Déterminer le domaine de définition et la dérivée de :

$$f(x) = (1 + \sin(x))^{\cos(x)}$$

Exercice B.5 : Etudier la fonction : $f : x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$

Partie C : Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice C.1 : Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a) \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad b) \arccos(\cos(4\pi)) \quad c) \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad d) \arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ e) \cos(\arctan(x)), x \in \mathbb{R} \quad f) \sin(3 \arctan(x)), x \in \mathbb{R}, \quad g) \tan(\arcsin(x)) \quad x \in]-1; 1[\\ h) \arccos(x) + \arccos(-x), x \in [-1; 1] \quad i) \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8) \end{aligned}$$

Exercice C.2 : Résoudre les équations suivantes, de variable x réelle :

$$\begin{aligned} 1) \arcsin(\sin(x)) &= \frac{\pi}{9} \quad 2) \arccos(x) = \arcsin(x) \quad 3) \arccos(x) = \arcsin(2x) \quad 4) \arccos(x) \\ &= \arcsin(1-x) \\ 5) 2 \arcsin(x) &= \arccos(|2x^2 - 1|) \quad 6) \arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \pi \quad 7) 2 \arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \\ 8) \arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) &= \arcsin(x) \quad 9) \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice C.3 : Après avoir précisé le domaine de validité, montrer les formules :

$$\begin{aligned} 1) \arcsin(x) + \arccos(x) &= \frac{\pi}{2} \quad 2) 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \\ 3) \arcsin(x) &= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad 4) 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice C.4 : Etudier la fonction $f : x \mapsto \arccos(\cos(3x))$

Exercice C.5 : Etudier la fonction $f : x \mapsto \sin(2 \arctan(x))$

Exercice C.6 : Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Exercice C.7 : Soit n un entier naturel. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$$

b) En déduire la valeur de S_n puis la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice C.8 : a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x - \arctan(x) \leq \frac{x^3}{3}$$

b) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$$

Partie D : Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{ch(x)}$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle I à préciser.
- 2) Représenter les courbes de f et de sa réciproque g .
- 3) Démontrer que :

$$\forall y \geq 1, ch(g(y)) = \frac{1}{y} \text{ et } sh(g(y)) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

- 4) Etudier le domaine de dérivabilité et la dérivée de g .

Exercice D.2 : Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \arctan(sh(x)) = \arccos\left(\frac{1}{ch(x)}\right)$$