

Chapitre 4 : Fonctions usuelles

Partie A : Fonctions exponentielle, logarithme et puissance

I) La fonction exponentielle

a) Existence et unicité

Propriété I.a.1 : Il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Propriété I.a.2 : Soit f une telle fonction. On a alors :

On a alors :

a) **Propriété 1** : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$.

b) **Propriété 2** : f est toujours strictement positive.

c) **Propriété 3** : f est unique.

Définition : L'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est appelée la fonction exponentielle.

On la note : $\exp : x \mapsto \exp(x)$.

b) Propriétés

Propriété I.b.1 : Pour tout réel a et b , et pour tout entier relatif n on a :

$$1) \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

$$3) \exp(na) = (\exp(a))^n$$

$$2) \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$4) \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

Définition : On peut calculer grâce à la méthode d'Euler que $\exp(1) \approx 2,72$. Ce nombre se note e (en hommage à Leonhard Euler). On notera dans toute la suite $e^x = \exp(x)$

Application I.b.2 : Simplifier les expressions suivantes :

$$1) f(x) = (e^x)^3 e^{2x} \quad g(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x+1}} \quad h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$$

c) Variations

Propriété I.c.1 : La fonction exponentielle est strictement croissante sur l'ensemble des réels.

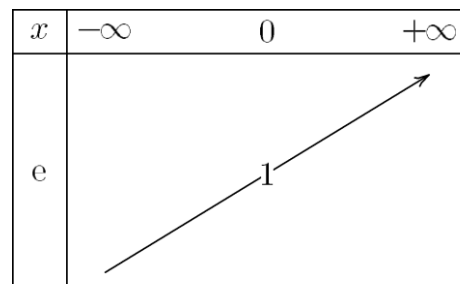
Corollaire I.c.2 : La fonction $\exp$ est injective sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

Application I.c.3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Corollaire I.c.4 :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$$



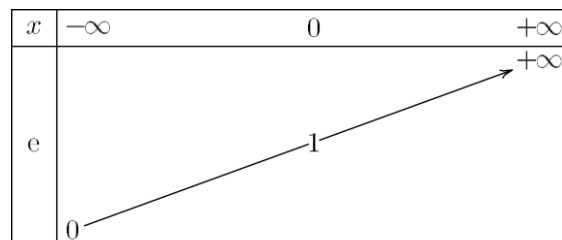
Application I.c.5 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$e^{-x^2+3x-2} \leq 1 \text{ et } \frac{e^x + 2}{e^x - 1} > 0$$

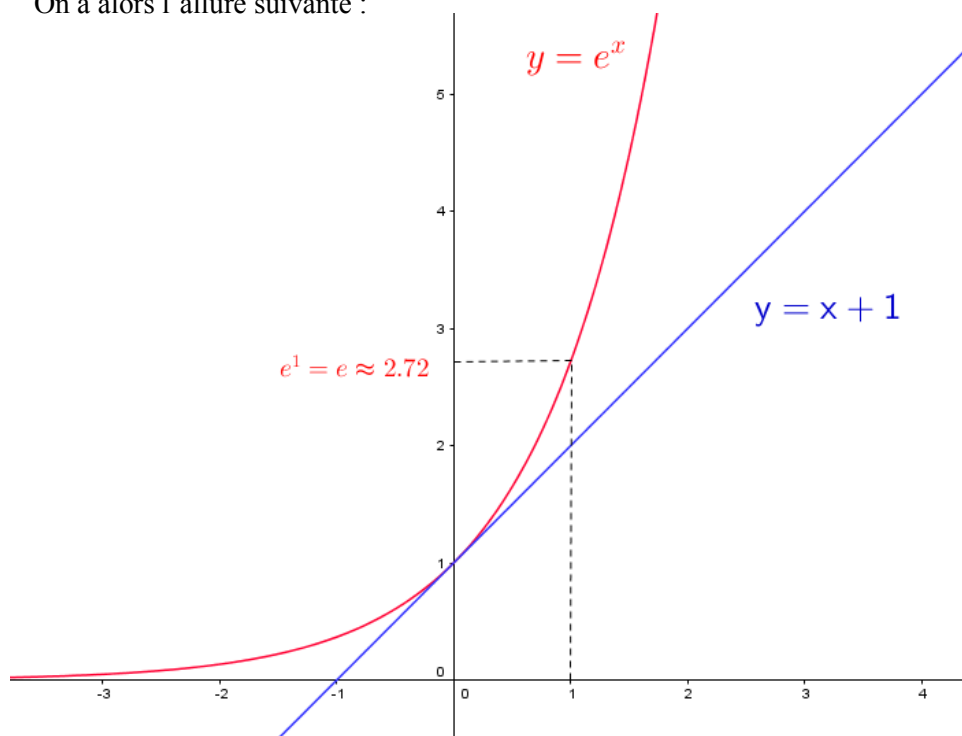
d) Limites

Proposition I.d.1 : On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



On a alors l'allure suivante :



Remarque : La fonction exponentielle est continue (car dérivable, nous verrons cela dans un prochain chapitre) et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$. Nous allons étudier à présent sa bijection réciproque.

II) La fonction logarithme népérien

a) La réciproque de l'exponentielle

Définition : On sait que la fonction exponentielle est **continue, strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$. Ainsi pour tout nombre réel $b > 0$, il existe un **unique** nombre réel a tel que : $e^a = b$

$$\exp: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[\\ a \mapsto e^a = b \end{cases}$$

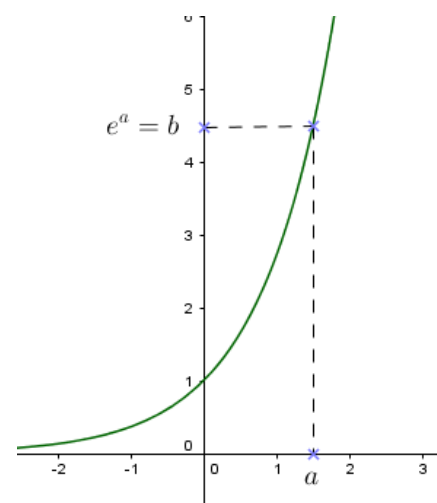
Définition : Il existe alors une unique fonction f tel que, pour tout $b \in]0; +\infty[$, $f(b) = a$.

On note cette fonction logarithme népérien de b et on note $\ln(b) = a$.

On a donc :

$$\forall b > 0, \exists! a \in \mathbb{R}, a = \ln(b) \Leftrightarrow e^a = b$$

$$\exp^{-1} = \ln$$



Application II.a.1 : Résoudre l'équation suivante : $e^{2x} - 8e^x + 12 = 0$

Propriété II.a.2 : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}$,

$$1) \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad 2) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad 3) \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad 4) \ln(a^y) = y \ln(a)$$

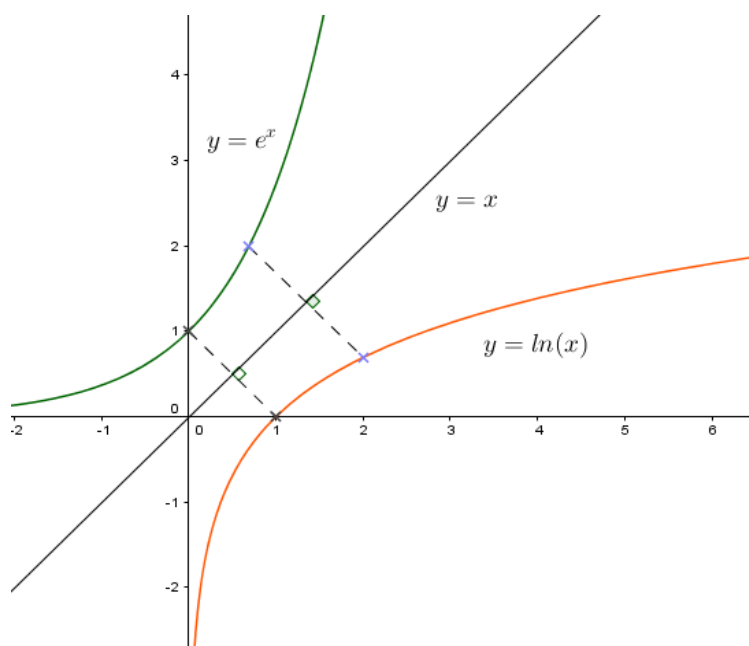
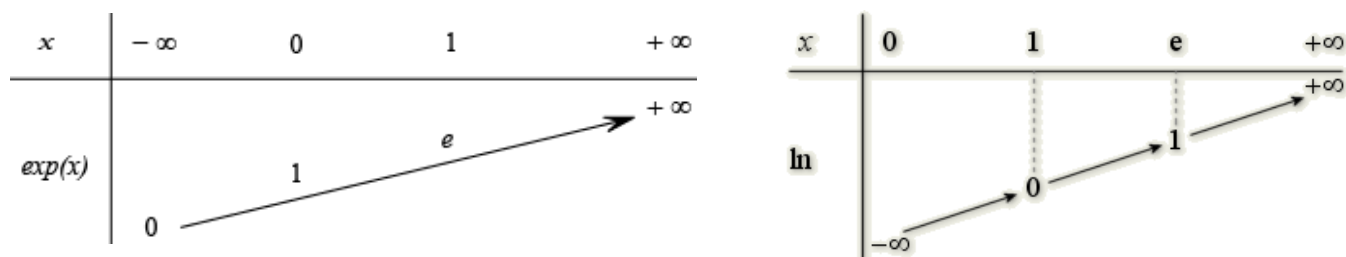
Exemple II.a.3 : Simplifier l'expression :

$$A = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \ln(\sqrt{3})$$

Application II.a.4 : Résoudre sur $\mathbb{R}$: a) $2^x = 2048$ b) $3^x > 5237$

b) Variations, limites aux bornes et courbes

Propriété II.b.1 :



Propriété II.b.2 : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

c) La fonction logarithme décimale

Remarque : Soit $a > 0$. Dans certains domaines (scientifique ou autre), on utilise des fonctions logarithmes de base a , qui sont définies comme ceci :

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Ainsi on a défini le logarithme en base 10 comme ci-après :

$$\forall x > 0, \log_{10}(x) = \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Ce qui nous permet notamment de résoudre des équations où l'inconnu est dans une puissance de 10.

Application II.c.1 : On sait qu'une solution contient $1,7 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ ion oxonium H_3O^+ , notée $[\text{H}_3\text{O}^+]$. Déterminer le pH de cette solution sachant que : $10^{-\text{pH}} = [\text{H}_3\text{O}^+]$.

III) Les fonctions puissances

a) Une définition pour α réel

Définition :

➤ Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^n x$$

Donc $x \mapsto x^n$ est défini sur $\mathbb{R}$.

➤ Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}}$$

Donc $x \mapsto x^{-n}$ est défini sur $\mathbb{R}^*$.

➤ Si $\alpha = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^0 = 1$$

➤ Pour toutes les autres valeurs de α réel. On définit alors :

$$p_\alpha: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{cases}$$

Exemple III.a.1 : Ecrire la fonction suivante sous forme exponentielle :

$$p_{0,4}: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{0,4} \end{cases}$$

b) Variations

Propriété III.b.1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $p_\alpha: x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Application III.b.2 : La fonction p_α est strictement monotone sur $]0; +\infty[$.

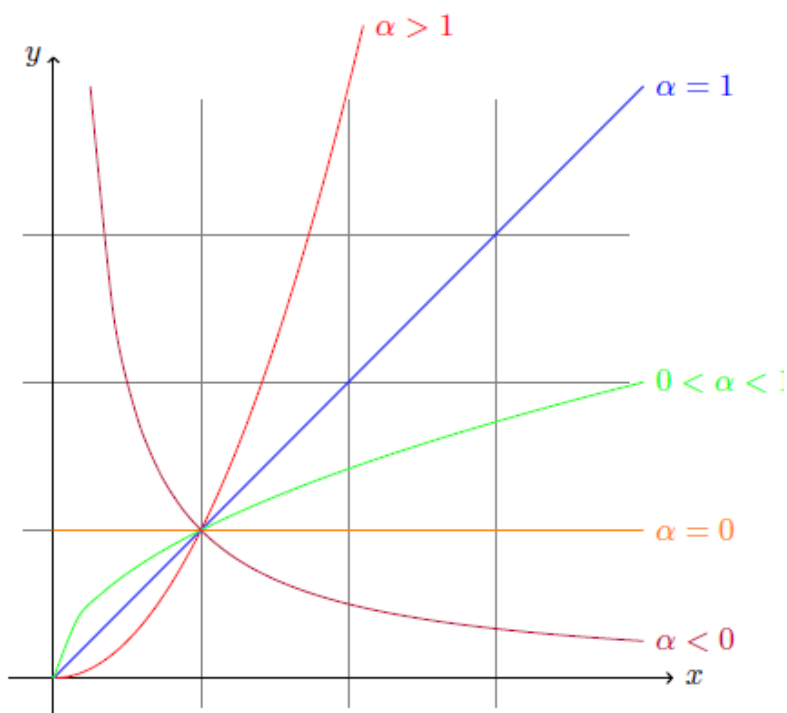
On a alors les allures suivantes :

➤ 1^{er} cas : $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \end{cases}$$

➤ 2^{ème} cas : $\alpha < 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 \end{cases}$$



c) Propriété et croissances comparées

Propriété III.c.1 : On a :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \\ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta} \\ \frac{1}{x^\beta} = x^{-\beta} \end{cases}$$

Propriété III.c.2 (Croissance comparée) : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{++})^2$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0$$

Application III.c.3 : Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{e^{3x} + 3}; \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x}; \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x)) \quad ; \quad \ell_4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Remarque : Pour étudier une fonction du type $u(x)^{v(x)}$ il convient de transformer cette fonction de la forme :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$$

Application III.c.4 : On pose $f: x \mapsto 2^x$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

Application III.c.5 : Etudier la fonction :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

IV) Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques

a) Décomposition d'exponentielle

Proposition IV.a.1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ centré en 0. Alors il existe un unique couple (f_p, f_i) de fonctions définies sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que :

- 1) $f = f_p + f_i$
- 2) f_p est paire
- 3) f_i est impaire

Remarque : On applique cela à la fonction exponentielle :

Définition :

- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** la partie paire de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** la partie impaire de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

b) Propriétés et variation

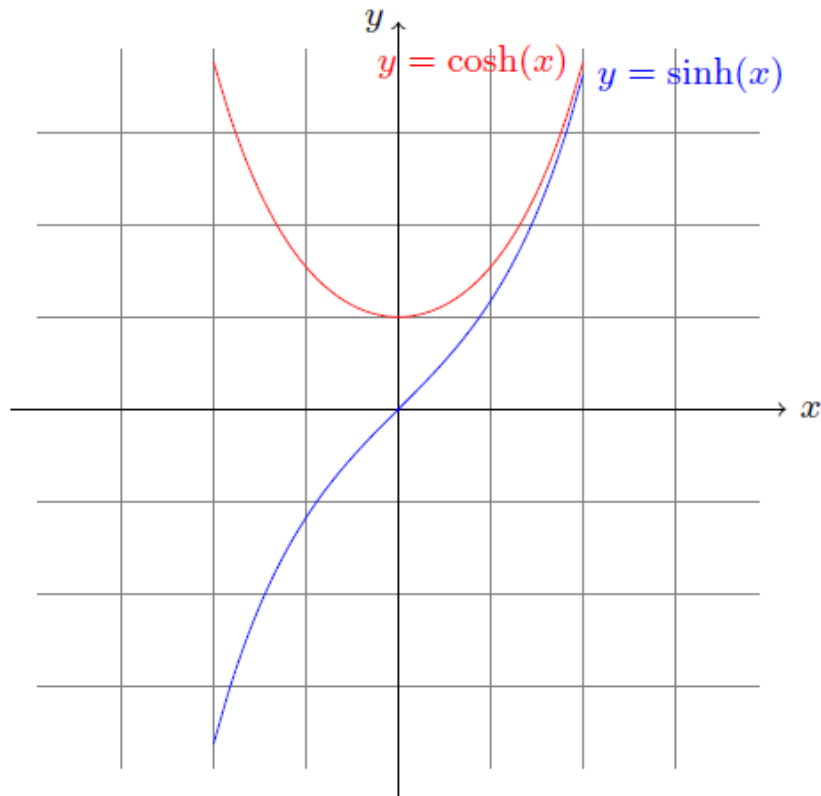
Propriété IV.b.1 : On a bien évidemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} ch(x) + sh(x) = e^x \\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \\ ch(x) - sh(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Propriété IV.b.2 : La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel : $ch'(x) = sh(x)$

La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel : $sh'(x) = ch(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty$$



Remarque : On a une analogie avec les formules de cosinus et sinus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ch(x + y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$$