

Chapitre 4 : Fonctions usuelles

Partie B : Fonctions trigonométriques

I) Les fonctions cosinus et sinus

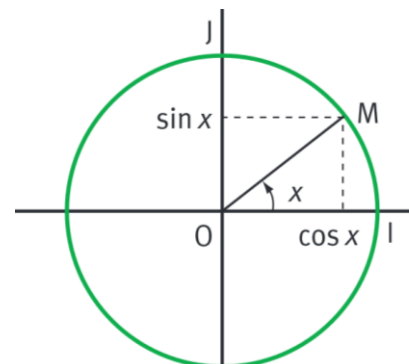
a) Les fonctions cosinus et sinus

Définition: On considère un cercle C orienté de centre O et de **rayon 1**.

Soit x un réel et M le point qui lui est associé tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$ et $OM = 1$ et $OM = 1$.

(C'est ce que l'on appelle les coordonnées polaires !)

On appelle **cosinus de x** et **sinus de x** les **coordonnées de M** dans le repère (O, I, J) . On a ainsi **$M(\cos x ; \sin x)$**

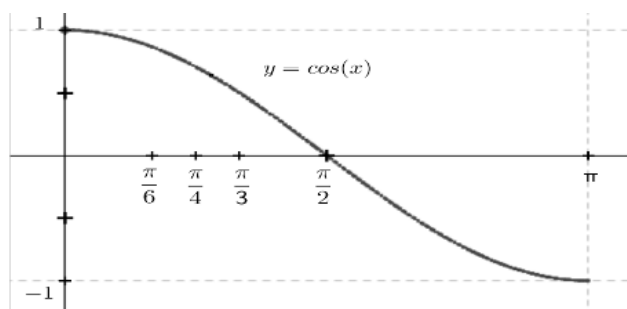


Exemple I.a.1 : $\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$

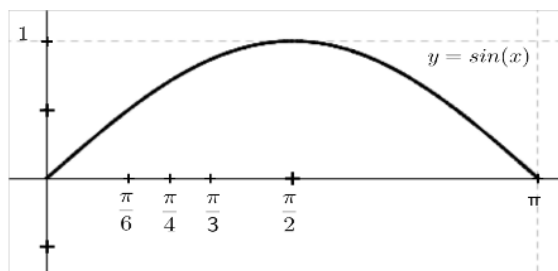
b) Représentation graphique de cos et sin

Propriété I.b.1 : Les fonctions cosinus et sinus étant respectivement paire et impaire et 2π -périodique, on les étudie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
COS	1	0	-1

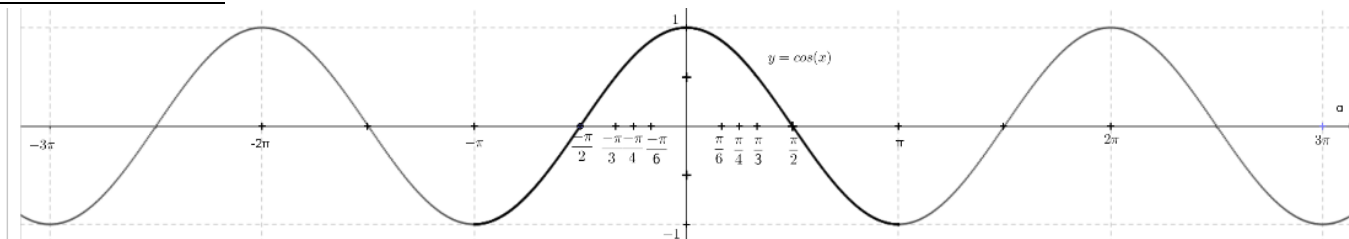


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
SIN	0	1	0

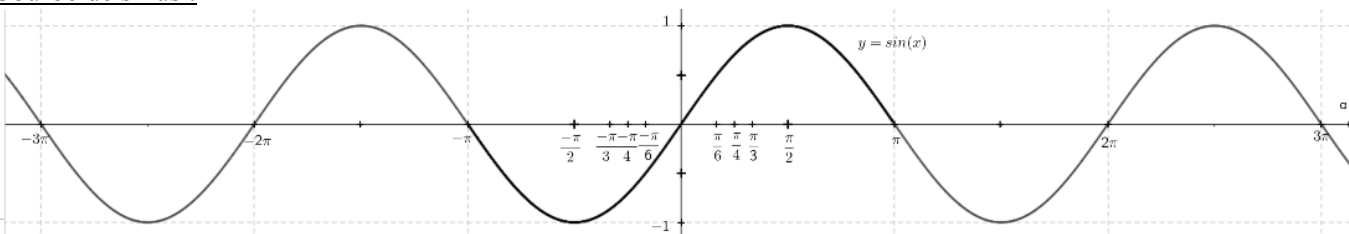


On prolonge ensuite les courbes représentatives par symétrie et 2π -périodicité :

Courbe de cosinus :



Courbe de sinus :



Propriété I.b.2 : On a le résultat suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ \sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Application I.b.3 : Résoudre l'équation $\sin(x) = 0,5$

Application I.b.4 : Résoudre l'inéquation $\cos(x) > 0,5$

c) Formules d'addition, élémentaires, linéarisation...

Propriété I.c.1 (formule d'addition) :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}$$

Application I.c.2 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Propriété I.c.3 (Formules élémentaires, à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$$

Application I.c.4 : Déterminer

$$A = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

Propriété I.c.5 (Formule de linéarisation) :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \end{cases}$$

Application I.c.6 : Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(2x) dx$$

Propriété I.c.7 (Transformation de somme en produit) :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{cases}$$

Application I.c.8 : Résoudre l'équation $\cos(x) + \cos(2x) = 0$

d) Dérivation**Propriété I.d.1** : On a :

$$(\cos; \sin) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; [-1; 1])^2 : \forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} \cos'(x) = -\sin(x) \\ \sin'(x) = \cos(x) \end{cases}$$

Application I.d.2 : Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ **Application I.d.3** : Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} ; \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

e) La bijection réciproque de $\cos|_{[0; \pi]}$: la fonction arccos**Propriété I.e.1** : La fonction $\cos|_{[0; \pi]}$ réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$. On définit alors la fonction :

$$\cos^{-1} = \arccos : \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] \\ x \mapsto \arccos(x) \end{cases} \text{ tel que :}$$

$$\forall x \in [0; \pi] \cos(x) = y \Leftrightarrow \arccos(y) = x$$

Exemple I.e.2 : Déterminer les valeurs de $\arccos(0)$; $\arccos(1)$; $\arccos(-1)$; $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **ATTENTION** : On a :

$$\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x$$

Par contre :

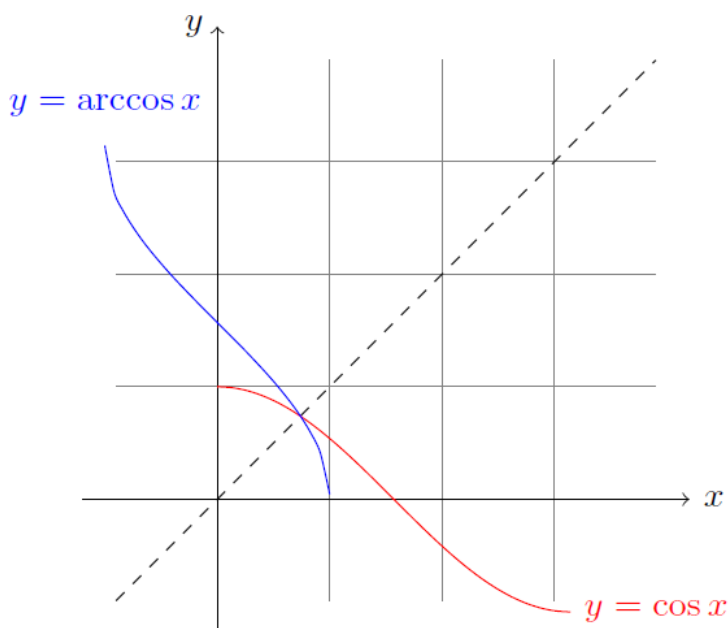
$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Application I.e.3 : Déterminer :

$$I = \arccos\left(\cos\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right)$$

Propriété I.e.4 : arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



f) La bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$: la fonction arcsin

Propriété I.f.1 : La fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1; 1]$. On définit alors la fonction :

$$\sin^{-1} = \arcsin : \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ x \mapsto \arcsin(x) \end{cases} \text{ tel que :}$$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x$$

Exemple I.f.2 : Déterminer les valeurs de $\arcsin(0)$; $\arcsin(1)$; $\arcsin(-1)$; $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})$

ATTENTION : On a :

$$\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x$$

Par contre :

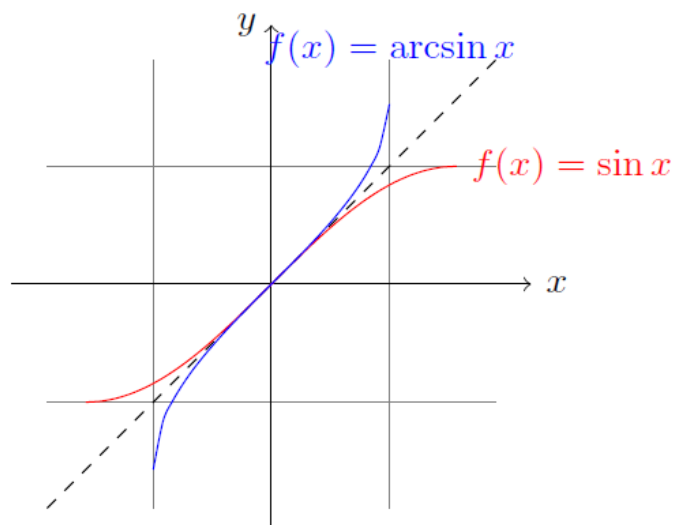
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Application I.f.3 : Déterminer :

$$I = \arcsin\left(\sin\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right)$$

Propriété I.f.4 : arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



II) La fonction tangente

a) Généralités

Définition (tangente) : Pour tout

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Exemple II.a.1:

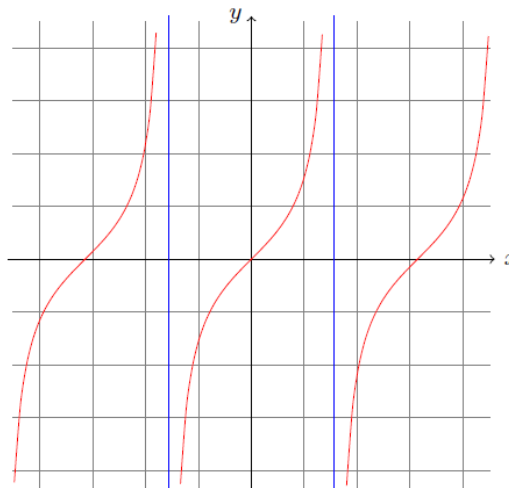
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Propriété II.a.2 : On a :

- 1) $\tan$ est π -périodique.
- 2) $\tan$ est impaire.
- 3) $\tan$ est dérivable et :

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\tan$	$-\infty$	0	$+\infty$



b) Propriétés

Propriété II.b.1 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, (quand cela est définie) :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

Application II.b.2 : Déterminer la valeur de :

$$I = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Propriété II.b.3 : Si $x \in \mathbb{R}$ et $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini, on a alors :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} ; \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} ; \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

c) La fonction arctangente

Propriété II.c.1 : La fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$ est bijective de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle $\arctan$ sa bijection réciproque.

$$\tan^{-1} = \arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \arctan(x) \end{cases} \text{ tel que :}$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \tan(x) = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x$$

Exemple II.c.2 : Déterminer les valeurs de $\arctan(0)$; $\arctan(1)$; $\arctan(-1)$; $\arctan(\sqrt{3})$

ATTENTION : On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$$

Par contre :

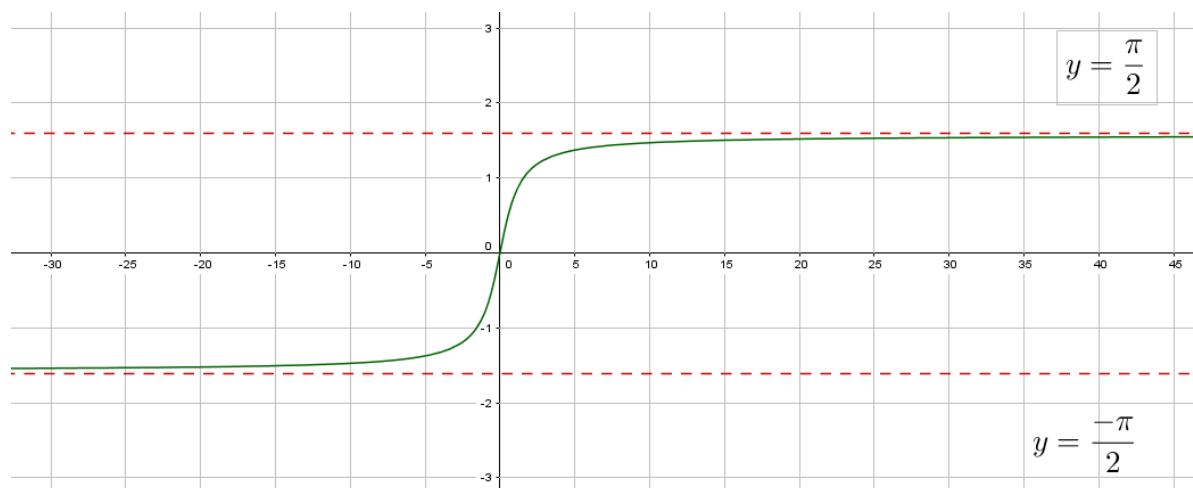
$$\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Application II.c.3 : Déterminer :

$$I = \arctan\left(\tan\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right)$$

Propriété II.c.4 : $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Propriété V.c.5 : On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x) \frac{\pi}{2}$$