

Programme de Colle n°2
PCSI 2026-2027
(21 au 25 septembre)

Inégalité dans $\mathbb{R}$

- Résolution d'inéquation avec des racines carrées
- Résolution d'inéquation avec des valeurs absolues (Inégalité triangulaire)
- Utiliser la monotonie d'une fonction pour démontrer une inéquation
- Démontrer la monotonie d'une fonction sans dérivation (ou avec dérivation)
- Majorant et minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Généralité sur les fonctions

- Ensemble de définition
- Graphe d'une fonction
- Limite et asymptotes horizontale et verticale
- Graphe d'une réciproque

Dérivation

- Dérivation des fonctions usuelles de première et terminale
- Dérivation d'une composée
- Dérivée n-ième
- Calcul de limite
- Equation de la tangente
- Monotonie

Fonctions usuelles

- Exponentielle
- Logarithme népérien
- Fonction puissance (croissance comparée avec l'exponentielle et le logarithme), fonctions hyperboliques *ch* et *sh*
- Fonctions trigonométriques *cos* et *sin*

Exercices du TD I,II,III, IV (début)

Question de cours

Chapitre I :

- Inégalité triangulaire :

Propriété II.a.3 (Inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, ||x| - |x'|| \leq |x + x'| \leq |x| + |x'|$$

Chapitre III :

- **Exemple I.e.1 :** On pose :

$$g: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

Déterminer $g^{(n)}$ pour tout n entier naturel.

- Equation de la tangente : formule + démonstration
- Montrer que *cos* restreinte sur $[0; \pi]$ est bijective, expression de la dérivée de sa réciproque sur $] -1; 1[$. On pourra s'attarder sur la non dérivabilité en -1 et 1 , en illustrant sur un schéma notamment.

Chapitre IV :

- Savoir retrouver une des formules trigonométriques du type $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$

Remarque 2 : Nous n'avons pas encore fait d'exercice sur les fonctions trigonométriques en TD, mais nous avons résolu de petites inéquations et équations du type $\cos(x) \geq a$, $\sin(x) = b \dots$

Exercices à savoir refaire

TD I :

- **Application II.a.4 :** Démontrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

- **Exercice B.1** : Démontrer les inégalités suivantes :

$$a) \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad b) \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

- **Exercice B6 du TD I** : 1) Démontrer que :

$$\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

TD II :

Etude de fonctions, montrer qu'une application est bijective + calcul de sa réciproque.

TD III :

- **Exercice C.1** : On pose :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f_m: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+m}{x^2+1} \end{cases}$$

On note C_m sa courbe représentative.

- 1) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.
- 2) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.

- **Application II.c.4** : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

TD IV :

- Soit $a > 0$. Résoudre le système suivant $(S_a): \begin{cases} xy = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{cases}$
- Démontrer que :

$$\forall x \in]0; 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$