

Correction n°1

Exercice 1 : Une petite étude de fonctions

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Démontrer que f est impaire.
- 3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) En déduire celle de f en $-\infty$.
- 4) a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble à déterminer.
b) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.
- 5) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f (on pourra la définir par morceaux)
- 6) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ ont une seule tangente commune.

- 1) On sait que $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + |x| \neq 0$$

- 2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{-x}{1 + |-x|} = -\frac{x}{1 + |x|} = -f(x)$$

- 3) a) On a :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{1 + x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Or on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ainsi on a par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

- b) On sait que f est impaire donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

- 4) a) On va étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$. On a :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{x}{1 + x}$$

Ainsi on a : Ainsi on a :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1 + x - x}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0$$

Donc $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi on a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f		

On résume :

- f continue sur $[0; +\infty[$

- f strictement croissante sur $[0; +\infty[$
- $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{cases}$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, **f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[0; 1[$.**

b) On a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^-)^2, x \leq y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y \leq -x \Rightarrow 0 \leq f(-y) \leq f(-x) \text{ car } f \text{ croissante sur } [0; +\infty[\\ \Rightarrow 0 \leq -f(y) \leq -f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \leq 0$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ (ce qui était immédiat par imparité, je viens de le démontrer ici).

On en déduit donc que :

- f continue sur $\mathbb{R}$
- f strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{cases}$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, **f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] - 1; 1[$.**

5) Soit $y \in [0; 1[$. On va chercher à résoudre $f(x) = y$.

On a :

$$f(x) = y \text{ donne } \frac{x}{1+x} = y \text{ (car } y \in [0; 1[\text{ donc } x \geq 0 \text{ d'après la question précédente)}$$

On a de plus :

$$\frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \text{ (car } y \in [0; 1[\text{ donc } 1-y \neq 0)$$

De même si $y \in] - 1; 0]$ on a :

$$f(x) = y \text{ donne } \frac{x}{1-x} = y \text{ donne } x = \frac{y}{1+y}$$

Ainsi on a :

$$f^{-1}: \begin{cases}] - 1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \begin{cases} \frac{y}{1+y} & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{y}{1-y} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On peut écrire cela :

$$\forall y \in] - 1; 1[, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

6) Pour que deux tangentes soient communes, une condition nécessaire est qu'elle est même coefficient directeur.

Regardons sur $]0; +\infty[$.

On a :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ donc } \forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

De même,

$$\forall x \in]0; 1[, f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x} \text{ donc } \forall x \in]0; 1[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On a : $\forall a > 0$ et $b \in]0; 1[$:

$$f'(a) = \frac{1}{(1+a)^2} < 1 < \frac{1}{(1-b)^2}$$

Regardons à présent si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente commune avec $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ pour f^{-1} sur $] - 1; 0[$.

On a :

$$\forall x \in] - 1; 0[, f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x} \text{ donc } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Or on a :

$$\forall a > 0 \text{ et } b \in] - 1; 0[, \frac{1}{(1+a)^2} < 1 < \frac{1}{(1+b)^2}$$

Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ n'ont pas de tangente commune pour tous les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses positives.

Par parité de f' , $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ n'ont pas de tangente commune pour tous les points de $\mathcal{C}_f$, excepté peut être le point d'abscisse 0.

En 0 on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x} = 1$$

De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-x} = 1$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

On fait de même pour f^{-1} et on obtient :

$$(f^{-1})'(0) = 1$$

Ainsi on a :

$$(T_{0,f}): y = x$$

De même :

$$(T_{0,f^{-1}}): y = x$$

Donc les courbes ont une seule tangente commune.

Exercice 2 : Une moyenne arithmétique et une moyenne géométrique

Soient n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ n réels strictement positifs. Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n$$

1) Démontrer que l'inégalité est vraie pour $n = 2$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 a_2$$

2) Démontrer que :

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n \Leftrightarrow \ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} (\ln(a_1) + \dots + \ln(a_n))$$

Ainsi nous allons tenter de démontrer dans la suite de l'exercice l'inégalité précédente.

Pour ce faire nous allons faire plus fort. Soit n un entier naturel non nul. On pose la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$\mathcal{P}(n) =$ "Pour tout $a_1, \dots, a_n$ réels strictement positifs, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels positifs tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a $\ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \ln(a_n)$ "

3) Déterminer pour quelle valeur de n et quelle valeur pour $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$ la question 1) est un cas particulier d'un certain $\mathcal{P}(n)$.

4) Soient $a > 0$ et $\lambda \in [0; 1]$. On pose :

$$f_a: x \mapsto \ln(\lambda x + (1 - \lambda)a) - \lambda \ln(x) - (1 - \lambda) \ln(a)$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f_a .

b) En étudiant les variations de f_a , démontrer que :

$$\forall x > 0, f_a(x) \geq 0$$

c) En déduire que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

5) On suppose dans cette question que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n entier naturel. On souhaite démontrer que $\mathcal{P}(n + 1)$ reste vraie.

a) Démontrer que si $\lambda_{n+1} = 1$, $\mathcal{P}(n + 1)$ reste vraie.

b) Si $\lambda_{n+1} \neq 1$, démontrer que :

$$\ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) \geq (1 - \lambda_{n+1}) \ln \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n \right) + \lambda_{n+1} \ln(a_{n+1})$$

c) En déduire que $\mathcal{P}(n+1)$ reste vraie pour tout $n \geq 1$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

6) En déduire que :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in]0; +\infty[^n, \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n$$

Remarque : On dit que la moyenne arithmétique de n nombres strictement positifs :

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Est toujours supérieure à sa moyenne géométrique :

$$G_n = (a_1 \times \dots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

7) Voici une application de l'inégalité précédente.

Démontrer que :

$$\text{Pour tout } a, b, c \text{ réels strictement positifs tel que } a + b + c = 1, \text{ alors } \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$$

(Remarque : On pourra mettre au même dénominateur et utiliser le fait que $a + b + c = 1$)

1) On peut calculer l'écart :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - ab = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$$

Ainsi l'égalité est démontrée.

2) On utilise le fait que la fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$ puis les propriétés du $\ln$:

$$\begin{aligned} \forall (a_1, \dots, a_n) \in]0; +\infty[^n, \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n &\Leftrightarrow \ln \left(\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \right) \geq \ln(a_1 \times \dots \times a_n) \\ &\Leftrightarrow n \ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \ln(a_1) + \dots + \ln(a_n) \\ &\Leftrightarrow \ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} (\ln(a_1) + \dots + \ln(a_n)) \end{aligned}$$

3) Pour $n = 2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Ainsi on a :

$$\forall (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 a_2 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \ln(a_1) + \frac{1}{2} \ln(a_2)$$

On retrouve donc bien un cas particulier de la propriété à démontrer pour $n = 2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5 > 0$

4) a) On veut :

$$\lambda x + (1 - \lambda)a > 0 \text{ et } x > 0$$

Ainsi on a :

$$x > \frac{\lambda - 1}{\lambda} a \text{ car } \lambda > 0 \text{ et } x > 0$$

Or $\lambda \in [0; 1]$ donc $\lambda - 1 \leq 0$.

Ainsi on a :

$$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$$

b) On a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\lambda}{\lambda x + (1 - \lambda)a} - \frac{\lambda}{x} = \lambda \times (1 - \lambda) \frac{x - a}{\lambda x + (1 - \lambda)a}$$

On a donc le tableau suivant :

x	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

De plus on a :

$$f(a) = \ln(a) - \ln(a) = 0$$

Ainsi on en déduit que :

$$\forall x > 0, f(x) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall \lambda \in [0; 1], \ln(\lambda x + (1 - \lambda)a) \geq \lambda \ln(x) + (1 - \lambda) \ln(a)$$

5) a) On a :

$$\lambda_{n+1} = 1 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) &= \ln(a_{n+1}) \\ &\geq \ln(a_{n+1}) \\ &\geq \lambda_1 \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \ln(a_n) + \lambda_{n+1} \ln(a_{n+1}) \end{aligned}$$

Ainsi **$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie**. C'est immédiat.

b) A présent si $\lambda_{n+1} \neq 1$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) &= \ln \left((1 - \lambda_{n+1}) \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n \right)}_{=A_n} + \lambda_{n+1} a_{n+1} \right) \\ &= \ln((1 - \lambda_{n+1})A_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) \ln(A_n) + \lambda_{n+1} \ln(a_{n+1}) \quad (\text{d'après la question 4}) \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) \leq (1 - \lambda_{n+1}) \ln \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n \right) + \lambda_{n+1} \ln(a_{n+1})$$

c) Il suffit d'utiliser l'hypothèse :

$$\ln \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n \right) \leq \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} \ln(a_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \ln(a_n)$$

Ainsi on a :

$$\ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) \leq \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} \ln(a_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \ln(a_n) + \lambda_{n+1} \ln(a_{n+1})$$

Donc **$\mathcal{P}(n+1)$ reste vraie**.

d) On a **initialisé** pour $n = 2$ mais en fait $\mathcal{P}(1)$ est vraie (c'est immédiat).

De plus on a montré que **l'hypothèse était héréditaire**. Donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6) Il suffit d'appliquer la proposition précédente. En effet on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = \frac{1}{n}$$

On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i > 0 \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$

On a alors en appliquant la proposition :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in]0; +\infty[^n, \ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln(a_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(a_n)$$

Ainsi d'après la question 2) on en déduit que :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in]0; +\infty[^n, \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n$$

7) On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) &= \left(1 + \frac{a+b+c}{a}\right)\left(1 + \frac{a+b+c}{b}\right)\left(1 + \frac{a+b+c}{c}\right) \\ &= \frac{(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+b+a)}{abc} \end{aligned}$$

Or d'après la propriété précédente, comme $a+b+c=1$ et $a>0, b>0$ et $c>0$ on peut appliquer la propriété précédente :

$$\left(\frac{2a+b+c}{4}\right)^4 \geq a^2bc, \left(\frac{2b+a+c}{4}\right)^4 \geq ab^2c, \left(\frac{2c+b+a}{4}\right)^4 \geq abc^2$$

Ainsi on a :

$$2a+b+c \geq 4 \times (a^2bc)^{\frac{1}{4}}, 2b+a+c \geq 4 \times (ab^2c)^{\frac{1}{4}}, 2c+b+a \geq 4 \times (abc^2)^{\frac{1}{4}}$$

Ainsi on a :

$$\frac{(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+b+a)}{abc} \geq 4^3 \frac{(a^4b^4c^4)^{\frac{1}{4}}}{abc}$$

Ainsi on a :

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$$

Problème 1 : Les démos des croissances comparées

Le but de ce problème est de démontrer les théorèmes de limite sur les croissances comparées : $\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0$$

Partie A : Démontrons le (1)

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, 2 \ln(x) \leq x$$

b) En déduire que :

$$\forall x \geq 1, \ln(x) \leq \sqrt{x}$$

c) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Dans la suite de cette partie on pose :

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha$$

b) Démontrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = +\infty$$

c) En déduire que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Partie B : Les autres

1) Démontrer le 2) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$$

(Indice : On pourra effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$)

2) On pose à présent :

$$g_{\alpha,\beta} : \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} \end{cases}$$

a) Déterminer la fonction $h_{\alpha,\beta}$ telle que :

$$\forall x > 0, g_{\alpha,\beta}(x) = e^{h_{\alpha,\beta}(x)}$$

b) Par composée de limite, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta}$$

3) Avec un changement de variable judicieux, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha$$

Partie A : Démontrons le (1)

1) On pose :

$$f: x \mapsto 2 \ln(x) - x \text{ sur } [1; +\infty[$$

On a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

Ainsi on a le tableau de variation suivant :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

$$\text{Or } f(2) = 2 \ln(2) - 2 = \ln(4) - 2$$

De plus on sait que :

$$e > 2 \text{ donc } e^2 > 4 \text{ donc } 2 > \ln(4) \text{ car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

Ainsi on a :

$$f(2) > 0$$

Ainsi on obtient :

$$\forall x \geq 1, 2 \ln(x) \leq x$$

b) On sait que :

$$\forall x \geq 1, \sqrt{x} \geq 1 \text{ (car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante)}$$

Ainsi on a :

$$2 \ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} \text{ donc on a } \ln(x) \leq \sqrt{x}$$

c) On sait que :

$$\forall x \geq 1, \ln(x) \leq \sqrt{x}$$

Ainsi comme $x \geq 1 > 0$, on a :

$$\forall x \geq 1, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3) On a :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \times \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln(x)\right)^\alpha}{\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta}$$

4) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\beta}{\alpha} \ln(x)} = +\infty \left(\text{car } \frac{\beta}{\alpha} > 0 \right)$$

De plus on sait que :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Partie B : Les autres

1) On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\left[\ln\left(\frac{1}{X}\right)\right]^\alpha}{\frac{1}{X}^\beta} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\left[\ln\left(\frac{1}{X}\right)\right]^\alpha}{\frac{1}{X}^\beta} = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^\beta (-\ln(X))^\alpha = 0 = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^\beta |\ln(X)|^\alpha$$

2) a) On sait que :

$$\forall x > 0, g_{\alpha, \beta}(x) = \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, \ln(g_{\alpha, \beta}(x)) = \alpha x - \beta \ln(x) = h_{\alpha, \beta}(x)$$

b) On sait que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x - \beta \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{par composée } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{(e^X)^\alpha}{X^\beta} = +\infty$$

3) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = \lim_{X \rightarrow +\infty} |-X|^\beta (e^{-X})^\alpha = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^\beta}{(e^X)^\alpha} = 0 \text{ (d'après la question précédente)}$$

Problème 2 : Un prolongement de fonction

Dans cet exercice on souhaite montrer que la fonction : $f: x \mapsto (x + \sqrt{x^2 + 1})^{\frac{1}{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et peut-être prolongée sur $\mathbb{R}$ par continuité en montrant que sa limite lorsque x tend vers 0 est finie.

On pourra remarquer pour la suite que :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

Partie A : Ensemble de définition de f .

Dans toute la suite on pose : $g: x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$

1) Démontrer que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

3) En déduire que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Partie B : Une limite finie

On souhaite à présent déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

1) Démontrer que f est paire.

Il nous suffit alors de déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

b) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$$

c) En déduire que :

$$\forall x > 0, -x + 2 - \sqrt{x^2 + 1} + 2 \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \leq \frac{1}{x} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \leq 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

3) a) Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

4) Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f: 0 \mapsto e$

Partie A : Ensemble de définition de f

1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Ainsi on a :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

On en déduit donc que g est définie sur $\mathbb{R}$.

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq x^2$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2}$$

Or on sait que $\sqrt{x^2} = |x| \geq -x$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} \geq -x$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

3) On sait que $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$, donc $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. On a donc f définie sur $\mathbb{R}^*$.

Partie B : Une limite finie

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = e^{-\frac{1}{x} \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
&= \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
&= \ln \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
&= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = e^{-\frac{1}{x} \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})} = e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} = f(x)$$

2) a)

_ Démontrons que :

$$\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$$

On pose :

$$h: x \mapsto \ln(1 + x) - x$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \geq 0, h'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x} \leq 0$$

Ainsi h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $h(0) = 0$.

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, h(x) \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$$

_ Montrons à présent que :

$$\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

On pose :

$$h_2: x \mapsto \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

On a alors :

$$\forall x \geq 0, h_2'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 + x = \frac{x^2}{1 + x} \geq 0$$

De plus on a :

$$h_2(0) = 0$$

On a donc :

$$\forall x \geq 0, h_2(x) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

b) De la même façon on pose :

$$h_3: x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$$

On a :

$$\forall x \geq 0, h_3'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

Donc h_3 est strictement croissante et :

$$h_3(0) = 1$$

On a donc :

$$\forall x \geq 0, x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$$

On a :

$$\forall X \geq 0, X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1 + X) \leq X$$

On pose :

$$X = x + \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

On a alors d'après les questions précédentes :

$$\forall x \geq 0, x + \sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0$$

On applique alors la double inégalité :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} - 1 - \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1} - 1)^2}{2} \leq \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq x + \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

Ensuite on calcule :

$$(x + \sqrt{x^2 + 1} - 1)^2 = x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1} - 2x - 2\sqrt{x^2 + 1}$$

Ainsi on obtient :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} - 1 - x^2 - 1 - x\sqrt{x^2 + 1} + x + \sqrt{x^2 + 1} \leq \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq x + \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

On obtient ainsi en multipliant par $\frac{1}{x} > 0$:

$$2 - x - \sqrt{x^2 + 1} + 2 \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \leq \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} \leq 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

3) a) On reconnaît un taux de variation :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = g'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} = 0 \text{ avec } g: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + 1 \text{ dérivable en } 0$$

b) D'après la question précédente on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x - \sqrt{x^2 + 1}) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right) = 1$$

Ainsi on obtient d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1$$

4) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$$

Ainsi d'après la question précédente et par composition on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$$

Ensuite par parité on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e$$

On obtient alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e}$$

Ainsi en posant $\tilde{f}(0) = e$ on peut prolonger f par continuité en posant $\tilde{f}: 0 \mapsto e$.