

DS n°1 PCSI 2026-2027

Nous rappelons ici que la calculatrice est interdite. Un soin tout particulier sera apporté quant à la rédaction et au soin de la copie. Nous rappelons que les résultats doivent être encadrés ou soulignés, et qu'un trait devra être tiré entre chaque question.

Exercice 1 : Une petite étude de fonctions

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Démontrer que f est impaire.
- 3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) En déduire celle de f en $-\infty$.
- 4) a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble à déterminer.
b) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.
- 5) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f (on pourra la définir par morceaux)
- 6) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ ont une seule tangente commune.

Exercice 2 : Une moyenne arithmétique et une moyenne géométrique

Soient n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ n réels strictement positifs. Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n$$

- 1) Démontrer que l'inégalité est vraie pour $n = 2$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 a_2$$

- 2) Démontrer que :

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n \Leftrightarrow \ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} (\ln(a_1) + \dots + \ln(a_n))$$

Ainsi nous allons tenter de démontrer dans la suite de l'exercice l'inégalité précédente.

Pour ce faire nous allons faire plus fort. Soit n un entier naturel non nul. On pose la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$\mathcal{P}(n)$ = "Pour tout $a_1, \dots, a_n$ réels strictement positifs, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels positifs tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a $\ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \ln(a_n)$ "

3) Déterminer pour quelle valeur de n et quelle valeur pour $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$ la question 1) est un cas particulier d'un certain $\mathcal{P}(n)$.

4) Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$. On pose :

$$f_a: x \mapsto \ln(\lambda x + (1 - \lambda)a) - \lambda \ln(x) - (1 - \lambda) \ln(a)$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f_a .

b) En étudiant les variations de f_a , démontrer que :

$$\forall x > 0, f_a(x) \geq 0$$

c) En déduire que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

5) On suppose dans cette question que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n entier naturel. On souhaite démontrer que $\mathcal{P}(n + 1)$ reste vraie.

a) Démontrer que si $\lambda_{n+1} = 1$, $\mathcal{P}(n + 1)$ reste vraie.

b) Si $\lambda_{n+1} \neq 1$, démontrer que :

$$\begin{aligned} & \ln(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) \\ & \geq (1 - \lambda_{n+1}) \ln\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n\right) + \lambda_{n+1} \ln(a_{n+1}) \end{aligned}$$

c) En déduire que $\mathcal{P}(n + 1)$ reste vraie pour tout $n \geq 1$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

6) En déduire que :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (]0; +\infty[)^n, \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \times \dots \times a_n$$

Remarque : On dit que la moyenne arithmétique de n nombres strictement positifs :

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Est toujours supérieure à sa moyenne géométrique :

$$G_n = (a_1 \times \dots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

7) Voici une application de l'inégalité précédente.

Démontrer que :

$$\begin{aligned} & \text{Pour tout } a, b, c \text{ réels strictement positifs tel que } a + b + c \\ & = 1, \text{ alors } \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64 \end{aligned}$$

(Remarque : On pourra mettre au même dénominateur et utiliser le fait que $a + b + c = 1$)

Problème 1 : Les démos des croissances comparées

Le but de ce problème est de démontrer les théorèmes de limite sur les croissances comparées :

$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2 :$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} &= 0 & (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha &= 0 & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} \\ &= +\infty & (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Partie A : Démontrons le (1)

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, 2 \ln(x) \leq x$$

b) En déduire que :

$$\forall x \geq 1, \ln(x) \leq \sqrt{x}$$

c) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Dans la suite de cette partie on pose :

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha$$

b) Démontrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = +\infty$$

c) En déduire que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Partie B : Les autres

1) Démontrer le 2) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$$

(*Indice* : On pourra effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$)

2) On pose à présent :

$$g_{\alpha, \beta} : \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} \end{cases}$$

a) Déterminer la fonction $h_{\alpha, \beta}$ telle que :

$$\forall x > 0, g_{\alpha, \beta}(x) = e^{h_{\alpha, \beta}(x)}$$

b) Par composée de limite, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta}$$

3) Avec un changement de variable judicieux, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha$$

Problème 2 : Un prolongement de fonction

Dans cet exercice on souhaite montrer que la fonction : $f: x \mapsto (x + \sqrt{x^2 + 1})^{\frac{1}{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et peut-être prolongé sur $\mathbb{R}$ par continuité en montrant que sa limite lorsque x tend vers 0 est finie.

On pourra remarquer pour la suite que :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

Partie A : Ensemble de définition de f .

Dans toute la suite on pose : $g: x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$

- 1) Démontrer que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
- 2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

- 3) En déduire que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Partie B : Une limite finie

On souhaite à présent déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

- 1) Démontrer que f est paire.
- Il nous suffit alors de déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

- 2) a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

- b) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$$

- c) En déduire que :

$$\forall x > 0, -x + 2 - \sqrt{x^2 + 1} + 2 \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \leq \frac{1}{x} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \leq 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

- 3) a) Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

- b) En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

- 4) Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f: 0 \mapsto e$