

Chapitre 7 : Vocabulaire ensembliste

Partie B : Applications

I) Généralités sur les ensembles

a) Vocabulaire

Définition : Soient E et F deux ensembles. On dit que f est une application de E dans F lorsqu'à tout élément x de E , f associe un unique élément de F , appelé **image de x par f** et noté $f(x)$. E est appelé **ensemble de départ** et F est l'**ensemble d'arrivée** de f . On note :

$$f: \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) = y \end{cases}$$

Si y est un élément de F , on dit que x est un antécédent de y par f lorsque $y = f(x)$.

Exemple I.a.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto i \times z + 2 - 3i \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Définition (graphe) : On appelle **graphe** de l'application f le sous-ensemble Γ de $E \times F$ défini par :

$$\Gamma = \{(x; f(x)) ; x \in E\}$$

Notation : L'ensemble des applications de E dans F est noté : $\mathcal{F}(E; F)$ ou F^E .

Ainsi on a :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

Définition (famille finie) : Soit E un ensemble et I un ensemble fini (bien souvent : $I = \llbracket 1; n \rrbracket$ ou $I = \llbracket 0; n \rrbracket$). On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E . On note $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille (Comme dans le chapitre 2 pour le calcul de la somme).

Définition (Egalité d'application) : Soit $(f; g) \in \mathcal{F}(E; F)^2$. On dit alors naturellement que $f = g$ si et seulement si :

$$\forall x \in E, f(x) = g(x)$$

b) Identité et indicatrice

Définition (Fonction identité) : On appelle application identité d'un ensemble E , l'application de E dans E défini par :

$$Id_E: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto f(x) = x \end{cases}$$

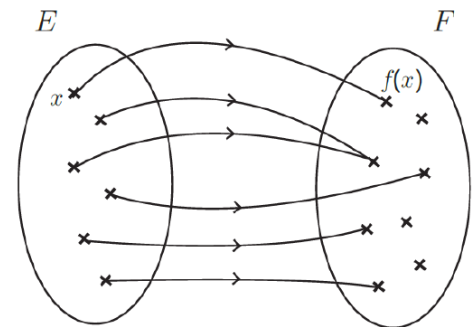
Exemple I.b.1 :

$$f: \begin{cases} [0; 1] \rightarrow [0; 1] \\ x \mapsto f(x) = x \end{cases}$$

Définition (Fonction indicatrice de A) : Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E . On appelle fonction indicatrice de A l'application suivante :

$$1_A: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon } (x \notin A) \end{cases} \end{cases}$$

Exemple I.b.2: Tracer le graphe de $1_{[-2; 3[}$.



Propriété I.b.3 : Pour tout A et B sous-ensembles d'un ensemble E on a :

- $1_A^2 = 1_A$
- $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$
- $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$

Application I.b.4 : Montrer que :

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$$

Remarque : Dans toute la suite de ce cours, E et F sont des ensembles quelconques et $f \in \mathcal{F}(E; F)$.

c) Image direct et réciproque

Définition (Image direct) : Soit X un sous-ensemble de E. On appelle l'image de X par f le sous-ensemble de Y suivant :

$$f(X) = \{y \in F ; \exists x \in E, f(x) = y\} = \{f(x); x \in X\}$$

Exemple I.c.1 : Déterminer l'image direct de $[-3; 2]$ par l'application :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{cases}$$

Application I.c.2 : Soient A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que :

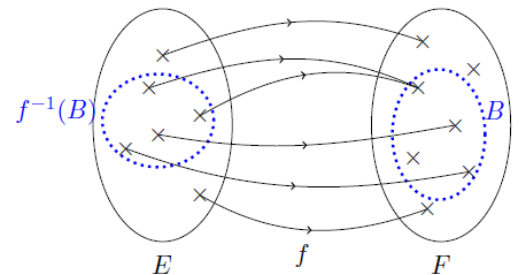
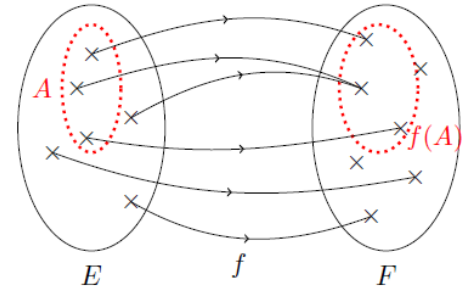
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Définition (Image réciproque) : Soit Y un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de Y par f le sous-ensemble :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E ; f(x) \in Y\}$$

Exemple I.c.3 : Déterminer l'image réciproque de $[4; 9]$ puis de $[-3; -1]$ par :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$



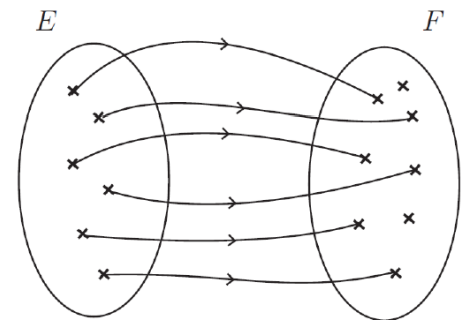
II) Injection, surjection et bijection

a) Injection

Définition (Injection) : Soit $f \in \mathcal{F}(E; F)$. On dit que f est injective (ou f est une injection) si et seulement si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E.

Exemple II.a.1 : Montrer que l'application suivante n'est pas injective :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$



Propriété II.a.2 : Soit $f \in \mathcal{F}(E; F)$ est injective si et seulement si :

$$\forall (x_1; x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Application II.a.3 : Montrer que g est injective avec :

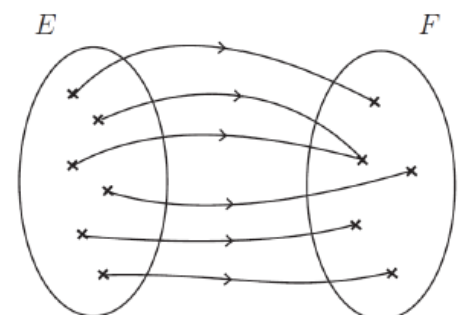
$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y) \end{cases}$$

Application II.a.4 : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E \Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

b) Surjection

Définition (Surjection) : Soit $f \in \mathcal{F}(E; F)$. On dit que f est surjective (ou f est une surjection) si et seulement si chaque élément de F admet un antécédent dans E : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$



Exemple II.b.1 : Montrer que l'application suivante est surjective :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y \end{cases}$$

Remarque : Pour montrer qu'une application est surjective, on prend un élément y de F et on montre qu'il est l'image d'un élément x de E .

Application II.b.2 : L'application suivante est-elle surjective ?

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1[\\ x \mapsto \frac{|x| - 1}{|x| + 1} \end{cases}$$

Propriété II.b.3 : Soit Y un sous-ensemble de F . Si f est surjective alors :

$$f(f^{-1}(Y)) = Y$$

c) Application bijective

Définition (bijection) : On dit que f est bijective si elle est injective et surjective :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$$

Exemple II.c.1 : Montrer que g est bijective avec :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + 2 \end{cases}$$

Application II.c.1 : Montrer que f est bijective avec :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (y; x + y) \end{cases}$$

Application II.c.2 : Montrer que l'application suivante n'est pas bijective :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1] \\ x \mapsto \frac{|x| - 1}{|x| + 1} \end{cases}$$

d) Restriction d'application et prolongement

Définition (restriction) : Soit A un sous-ensemble de E . On pose restriction de f à A , noté $f|_A$, l'application définie de A dans F par :

$$\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$$

Ceci nous permet par exemple de travailler avec des applications qui sont bijectives sur un sous-ensemble de A .

Exemple : la fonction $\cos|_{[0; \pi]}$ est une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$.

Définition (prolongement) : Soit A un sous-ensemble de E et $f \in \mathcal{F}(A; F)$. On appelle prolongement de f , noté $\bar{f}$, toute application tel que :

$$\forall x \in A, \bar{f}(x) = f(x)$$

Exemple II.d.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$$

Voici alors deux prolongements de f sur $\mathbb{R}$.

$$\bar{f}_1: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{f}_2: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

