Fiche TD 8 : Calcul de primitives

Partie A : Calculs classiques de primitives et intégrale

Exercice A.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto x^3 + 5x^2 - 3x + 1;\ f_2 : x \longmapsto cos(3x)\quad ; f_3(x) = e^{-5x}\ ; f_4(x) = \frac{1}{x+2};\ f_5 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f_6 : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}\ f_7 : x \longmapsto \frac{1}{x^4};\ f_8 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\quad ; f_9(x) = \sqrt{x}\ ; f_{10}(x) = x\sqrt{x};$$

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^2};\ f_2 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}\quad ; f_3(x) = \frac{sin(x)}{1+cos^2(x)}\ ; f_4(x) = \frac{1}{x\,ln(x)};\ f_5 : x \longmapsto cos^4(x);$$

$$f_6 : x \longmapsto cos(x)\,sin^4(x)\quad f_7 : x \longmapsto cos^3(x)\,sin^4(x)\quad f_8 : x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{ln(x)}{x}dx,\ \ I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$$

Exercice A.4 : On cherche à calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 e^{-2x}\,cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

1) a) On pose la fonction :0

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(acos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\,sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)e^{-2x} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que $g_{a,b}$ soit une primitive de $x \longmapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) En déduire la valeur de I.

2) En utilisant les complexes, déterminer une primitive de $x \longmapsto e^{-2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ puis retrouvez I.

Partie B : Changement de variable et intégration par partie

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto xe^{3x};\ f_2 : x \longmapsto (x+3)\,cos(3x)\quad ; f_3(x) = arcsin(x)\ ; f_4(x) = x\,arctan(x);\ f_5 : x \longmapsto x^2\,cos(x);$$

Exercice B.1 BIS : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{3x}dx\,; I_2 = \int_0^\pi (x+3)\cos(3x)\,dx; I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx\,; I_4 = \int_0^1 xarctan(x)dx\,; I_5 = \int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$$

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable (ils sont donnés à la fin du TD pour vous aider), déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2}$ 2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{ch(x)}$ 3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ 4. $f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{e^x(1+e^x)}$ 6. $f_6 : x \mapsto \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 7. $f_7 : x \mapsto \frac{1}{tan(x)+1}$

Exercice B.2 BIS Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable (ils sont donnés à la fin du TD pour vous aider) :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx\,; I_2 = \int_{0}^{1} \frac{dx}{ch(x)}; I_3 = \int_{1}^{2} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx\,; I_4 = \int_{0}^{2} e^{\sqrt{x}}dx\,; I_5 = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

$$I_6 = \int_{2}^{3} \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx\ ; I_7 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{tan(x)+1}$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs des primitives suivantes :

1) $\int^{x} tln(t^2+1)dt\,;$ 2) $\int^{x} (t^2-t+3)e^{2t}dt\,,$ 3) $\int^{x} ln(1+t^2)dt$

4) $\int^{x} tsin^3(t)dt\,,$ 5) $\int^{x} \sqrt{16t^2+9}dt$ 6) $\int^{x} sh(t)\,sin(t)\,dt$

Exercice B.4 : Calculer :

1) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{arcsin(t)}{1-t^2}}dt$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^3(t)\,sin^4(t)\,dt$ 3) $\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt$

4) $\int_{-1}^{1} (t^3-1)ch(t)dt$ 5) $\int_{0}^{1} \frac{dt}{2t^2+2t+1}$ 6) $\int_{0}^{1} \frac{dt}{e^t+1}$

Exercice B.5 : En posant $x = tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+cos(t)}$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2-sin(t)}$ 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{sin(t)-cos(t)+\sqrt{2}}$

Partie C : Primitives et intégrales des fonctions rationnelles

Exercice C.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-6};\ f_2 : x \mapsto \frac{x+3}{x^2+x-6};\quad ; f_3(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}\ ; f_4(x) = \frac{2x^2+x-9}{x^2+2x+3};\ f_5 : x \mapsto \frac{7x+1}{x^2-6x+9};$$

Exercice C.2 : Calculer :

$$I_1 = \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3+1}dx$$

Exercice C.3 : On cherche à calculer :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sin(t)+tan(t)}dt$$

1) En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(u)du \text{ avec R une fraction rationnelle.}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Partie D : Suites d'intégrale

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \, dx$$

1) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

3) En déduire que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice D.2 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) \, dx$$

1) Etablir une formule de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

2) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de somme.