Programme de Colle n°7
PCSI 2026-2027
(9 novembre au 13 novembre)

Chapitre 6 : Nombres complexes

Chapitre 7 : Ensemble et application

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Chapitre 8 – Primitives

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

Remarque : Il est demandé aux élèves de bien comprendre :

- Les primitives usuelles
- L'intégration par partie

Questions de cours :

Application II.a.4 : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E \iff \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Propriété III.b.2 : Soient E, F deux ensembles tels que f ∈ $\mathcal{F}$(E; F) et g ∈ $\mathcal{F}$(F; G). On a :

- f et g injectives ⇒ g o f injective

g o f injective ⇒ f injective

- f et g surjectives ⇒ g o f surjective

g o f surjective ⇒ g surjective

- f et g bijectives ⇒ g o f bijective

g o f bijective ⇒ f injective et g surjective

Propriété III.a.1 : Soit (f, g) ∈ $\left(\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Propriété I.b.1 : On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{-b-\delta}{2a}; \frac{-b+\delta}{2a}, avec\ \delta^2 = b^2 - 4ac\right\}$$

Application II.e.3 **:** Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)$ en linéarisant, où n est donné.

Application II.d.4 : Simplifier : ∀ θ ∈ ℝ, ∀ n ∈ ℕ,

$$S_n(\theta) = 1 + cos(\theta) + cos(2\theta) + \ldots + cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$$

$$W_n(\theta) = sin(\theta) + sin(2\theta) + \ldots + sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$$

Exercices du type :

Application II.c.9 : Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}, i\mathbb{R}$$

Application II.e.6 : Application Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ avec la formule d'Euler ou de Moivre.

Exercice G.5 : On pose l'équation (E) :

$$(E): 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution réel.
2) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice G.11 : On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.
1) Calculer u+v puis u^2 en fonction de u et de v.
2) En déduire la valeur de :

$$S = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

Exercice A.2 : Démontrer que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

Exercice B.4 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + z \end{cases}$$

On pose l'ensemble :

$$A = \left\{z \in \mathbb{C}; \left|z + \frac{1}{2}\right| = 2\right\}$$

Déterminer f(A) et $f^{-1}(\mathbb{R})$

Exercice B.5 : Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives et bijectives :

$$f:\begin{cases}]0;+\infty[\to [0;+\infty[\\ x \mapsto x+\dfrac{1}{x}\end{cases} \qquad g:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y;xy)\end{cases} \qquad h:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto x-y^2\end{cases}$$

$$f:\begin{cases}\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases}\dfrac{n}{2} \text{ si n pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si n impair}\end{cases}\end{cases} \qquad g:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x-y;-2x+3y)\end{cases} \qquad h:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (\max(x;y)\,;\min(x;y))\end{cases}$$

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto \frac{x}{1+x^2};\ f_2: x \mapsto \frac{x}{1+x^4}\ ;f_3(x)=\frac{sin(x)}{1+cos^2(x)}\ ;f_4(x)=\frac{1}{x\,ln(x)};\ f_5: x \mapsto cos^4(x)\,;$$

$$f_6: x \mapsto cos(x)\,sin^4(x) \qquad f_7: x \mapsto cos^3(x)\,sin^4(x) \qquad f_8 : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{dx},\quad I_2=\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\mathrm{dx}$$

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$f_1: x \mapsto xe^{3x};\ f_2: x \mapsto (x+3)\,cos(3x)\ ;f_3(x)=arcsin(x)\ ;f_4(x)=x\,arctan(x)\,;\ f_5: x \mapsto x^2\,cos(x)\,;$

Exercice B.1 BIS : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 xe^{3x}dx\,;I_2=\int_0^{\pi}(x+3)\cos(3x)\,dx;I_3=\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin(x)\,dx\,;I_4=\int_0^1 xarctan(x)dx\,;I_5=\int_0^{\pi}x^2\cos(x)\,dx$$