**Programme de Colle n°8**
**PCSI 2026-2027**
**(16 novembre au 20 novembre)**

## Chapitre 7 : Ensemble et application

### b) Ensembles

| | |
|---|---|
| Ensemble, appartenance. Ensemble vide. | |
| Inclusion. Partie (ou sous-ensemble). | |
| Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire. | Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et $A^c$ pour le complémentaire. |
| Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. | |
| Ensemble des parties d'un ensemble. | Notation $\mathscr{P}(E)$. |
| Recouvrement disjoint, partition. | |

### d) Applications

| | |
|---|---|
| Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application. | Le point de vue est intuitif : une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et $F^E$. |
| Famille d'éléments d'un ensemble. | |
| Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. | Notation $\mathbb{1}_A$. |
| Restriction et prolongement. | Notation $f\|_A$. |
| Image directe. | Notation $f(A)$. |
| Image réciproque. | Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. |
| Composition. | |
| Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. | |
| Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. | Notation $f^{-1}$. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque. |

## Chapitre 8 – Primitives

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Calcul de primitives** | |
| Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives. | Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue $f$, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée $f$. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de $f$. |
| Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales. | Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$. |
| Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. | Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. |
| Intégration par parties, changement de variable. | Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité. |

**Remarque :** Il est demandé aux élèves de bien comprendre :

- Les primitives usuelles
- L'intégration par partie
- Le changement de variable
- La décomposition en éléments simples

## Questions de cours :

***Application II.a.4*** : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E \iff \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

**Propriété III.b.2** : Soient E, F deux ensembles tels que f ∈ $\mathcal{F}$(E; F) et g ∈ $\mathcal{F}$(F; G). On a :

- f et g injectives ⇒ g o f injective
  g o f injective ⇒ f injective
- f et g surjectives ⇒ g o f surjective
  g o f surjective ⇒ g surjective
- f et g bijectives ⇒ g o f bijective
  g o f bijective ⇒ f injective et g surjective

**Propriété III.a.1** : Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

**Savoir calculer des primitives du type :**

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{p_0x^2+p_1x+p_2}$$

## Exercices types

**Exercice A.2** : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^2};\ f_2 : x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}\ ; f_3(x) = \frac{sin(x)}{1+cos^2(x)}\ ; f_4(x) = \frac{1}{x\,ln(x)};\ f_5 : x \longmapsto cos^4(x)\,;$$

$$f_6 : x \longmapsto cos(x)\,sin^4(x) \quad f_7 : x \longmapsto cos^3(x)\,sin^4(x) \quad f_8 : x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

**Exercice A.3** : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx,\quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$$

**Exercice B.1** : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \longmapsto xe^{3x};\ f_2 : x \longmapsto (x+3)\,cos(3x)\ ; f_3(x) = arcsin(x)\ ; f_4(x) = x\,arctan(x)\,;\ f_5 : x \longmapsto x^2\,cos(x)\,;$$

**Exercice B.1 BIS :** Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{3x}dx\,; I_2 = \int_0^\pi (x+3)\cos(3x)\,dx; I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx\,; I_4 = \int_0^1 xarctan(x)dx\,; I_5 = \int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$$

**Exercice B.2** : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2}$ 2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{ch(x)}$ 3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ 4. $f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

**Calcul de :**

$$I_5 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \; ; I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{tan(x)+1}$$

**Exercice B.5 :** En posant $x = tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{dt}}{2+\cos(\mathrm{t})}$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{dt}}{2-\sin(\mathrm{t})}$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{dt}}{\sin(\mathrm{t})-\cos(\mathrm{t})+\sqrt{2}}$