

TP Informatique 17

Exercice 1

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants. Par une récurrence immédiate, la suite est à valeurs dans \mathbb{N} . Par ailleurs, on peut démontrer l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \right) \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1. Écrire, en utilisant l'expression du terme général de la suite $(u_n)_n$, une fonction `fib1(n)` d'argument n entier qui renvoie la valeur de u_n . On effectuera un unique calcul de puissance. En particulier, le terme $(-1)^n$ ne sera pas calculé par exponentiation.
2. Afficher les dix premières valeurs de la suite $(u_n)_n$. On pourra utiliser la liste par compréhension `[fib1(n) for n in range(10)]`. Que constate-t-on sur la nature du résultat ? Que renvoie `fib1(2000)` ?
3. Écrire une fonction `expo(x, n)` d'arguments x un flottant, n un entier et qui renvoie la valeur de x^n calculé par exponentiation rapide. Tester la fonction pour différentes valeurs de x et n .
4. Écrire une fonction `fib2(n)` d'argument n entier qui renvoie la valeur de u_n . On effectuera un unique calcul de puissance par exponentiation rapide. Vérifier que les dix premières valeurs de la suite $(u_n)_n$ calculée à l'aide de `fib2` sont conformes à celles obtenues avec `fib1`.
5. Écrire une fonction `fib3(n)` d'argument n entier qui renvoie la valeur de u_n en la calculant à l'aide d'une boucle en ne manipulant que des objets de type `int`. Vérifier que les dix premières valeurs de la suite $(u_n)_n$ calculée à l'aide `fib3` sont conformes à celles obtenues avec `fib1` et `fib2`.
6. Déterminer le seuil à partir duquel les réponses entre `fib1` et `fib3` ont un écart supérieur ou égal à un.
7. Récupérer le fichier `TP17_EX01.py` sur le site de la classe, y copier-coller les fonctions `fib1`, `fib2` et `fib3` et lancer le script (qui peut durer quelques instants). Celui-ci affiche un graphique des temps d'exécution des trois fonctions précédentes en fonction de l'argument n . Commenter les résultats obtenus.

Exercice 2

Dans l'exercice précédent, on a utilisé l'exponentiation rapide mais sur du calcul flottant donc inexact. Dans cet exercice, on se propose de réaliser un calcul exact en ne manipulant que des objets de type `int` et en utilisant à nouveau l'exponentiation rapide. La suite $(u_n)_n$ désigne la suite de Fibonacci définie précédemment. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

On rappelle la définition de la multiplication matricielle avec

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

On observe
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n$$

La suite $(X_n)_n$ vérifie une relation géométrique et comme pour une suite réelle ou complexe, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$$

Ainsi, le calcul du u_n pour n entier peut être obtenu à partir de l'exponentiation matricielle A^n . La matrice A sera saisie par `np.array([[0, 1], [1, 1]], dtype=object)`. La matrice identité, élément neutre pour le produit matriciel, sera saisie par `np.array([[1, 0], [0, 1]], dtype=object)`. Le produit de deux matrices M et N sera réalisé par l'instruction `np.dot(M, N)`.

1. Écrire une fonction `expo(X, n)` d'arguments X une matrice (format `ndarray`), n un entier et qui renvoie la matrice X^n calculé par exponentiation rapide. Tester la fonction pour la matrice A et différentes valeurs de n .
2. Écrire une fonction `fib4(n)` d'argument n entier qui renvoie la valeur de u_n à l'aide d'une exponentiation rapide matricielle. Vérifier que les dix premières valeurs de la suite $(u_n)_n$ calculée à l'aide `fib4` sont conformes à celles obtenues avec `fib3`.
3. Récupérer le fichier `TP17_EX02.py` sur le site de la classe, y copier-coller les fonctions `fib3`, `fib4` et lancer le script (qui peut durer quelques instants). Celui-ci affiche un graphique des temps d'exécution des deux fonctions précédentes en fonction de l'argument n . Commenter les résultats obtenus.