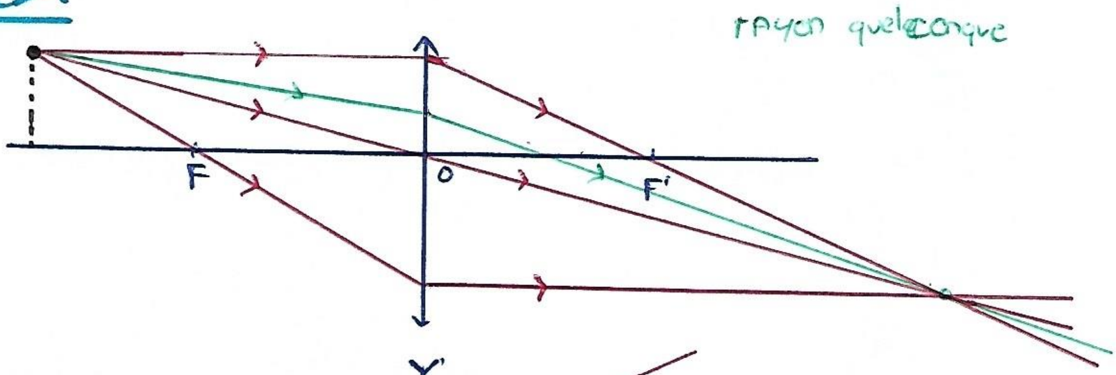
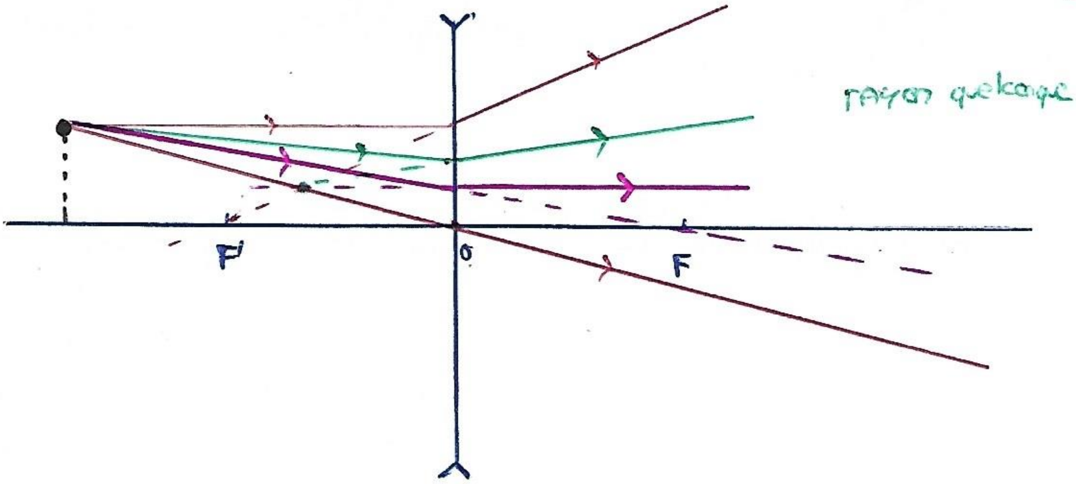
TD n°2 : Formation des images

Applicat° directe :

1)

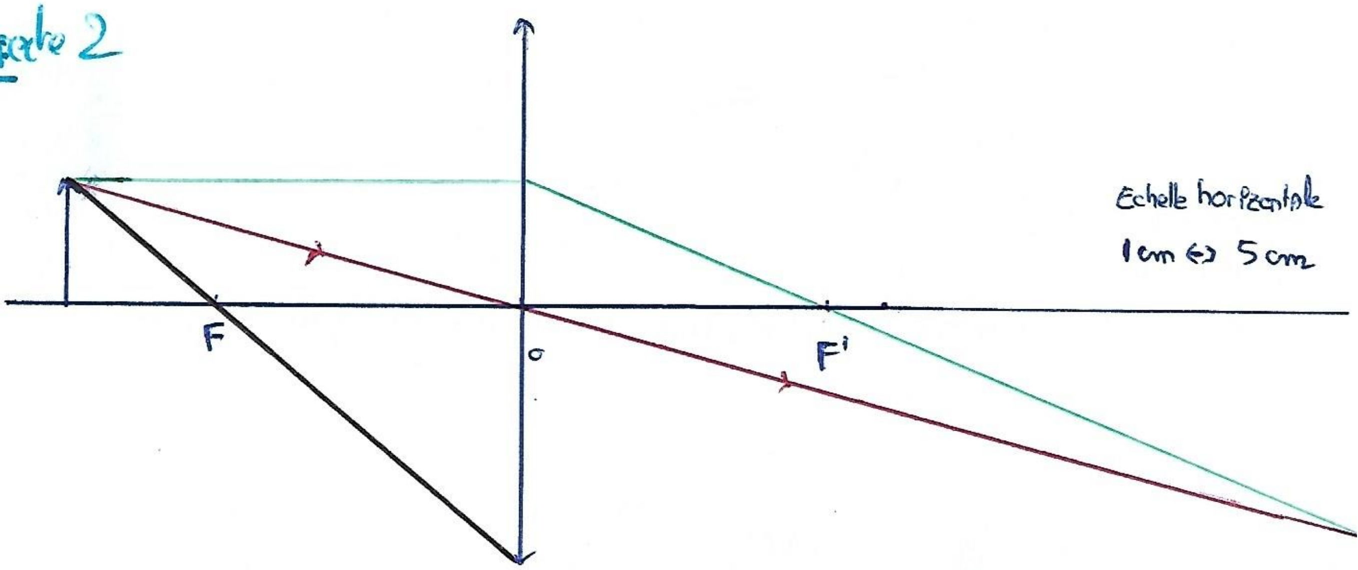


2)



Applicat° directe 2

1)



$f' = \overline{OF'} = 20\text{ cm}$ (4 cm)

$\overline{OA} = -30\text{ cm}$ (−6 cm)

La relation de conjugaison s'écrit.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

d'où $\dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{f'} + \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA} + f'}{\overline{OA} \cdot f'}$

on a donc $\boxed{\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA} \cdot f'}{\overline{OA} + f'}}$

AN : $\overline{OA'} = 25\text{ cm}$ soit cm sur la figure

Avec la relation de Newton

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\overline{F'A'} = \frac{-f'^2}{\overline{FA}} = \frac{-f'^2}{\overline{FO}+\overline{OA}} = \frac{-f'^2}{-\overline{OF}+\overline{OA}} = \frac{-f'^2}{f'+\overline{OA}}$$

$$\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = f' + \frac{-f'^2}{f'+\overline{OA}}$$

$$= \frac{f'(f'+\overline{OA}) - f'^2}{f'+\overline{OA}} = \boxed{\frac{\overline{OA}\,f'}{\overline{OA}+f'}}$$

m̃ resultat qu'avec la relat° de Descartes

Exercice 1 :

D'après la relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$

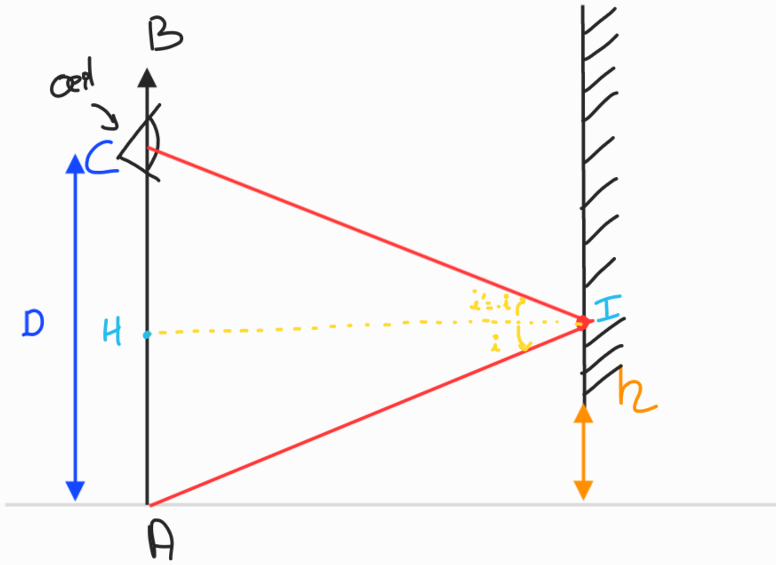
Le grandissement est $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ (relation de grandissement).

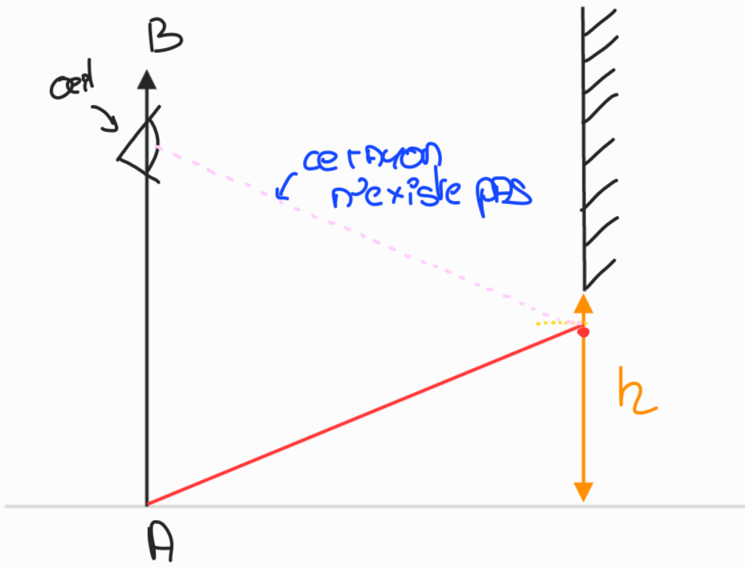
On a donc $\frac{1}{\gamma \overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma \overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \boxed{\overline{OA} = \frac{1-\gamma}{\gamma} f'}$ $\boxed{\overline{OA'} = (1-\gamma) f'}$

AN : $\underline{\overline{OA} = -7{,}5 \text{ cm}}$ $\underline{\overline{OA'} = 15 \text{ cm}}$

Exercice 2 : Observation dans un miroir

On commence par un schéma !





Il existe un rayon issu de A (chaussures), qui est réfléchi et arrive jusqu'à l'oeil.

Le miroir est "trop haut", le rayon n'est pas réfléchi.

Distance maximale : $AH = h$.

$AH = \frac{AC}{2}$ ($i' = -i$)

Il faut donc que $\boxed{h \leq D/2}$

$h_{max} = \frac{D}{2}$

AN $h_{max} = \frac{1,5}{2}$ m

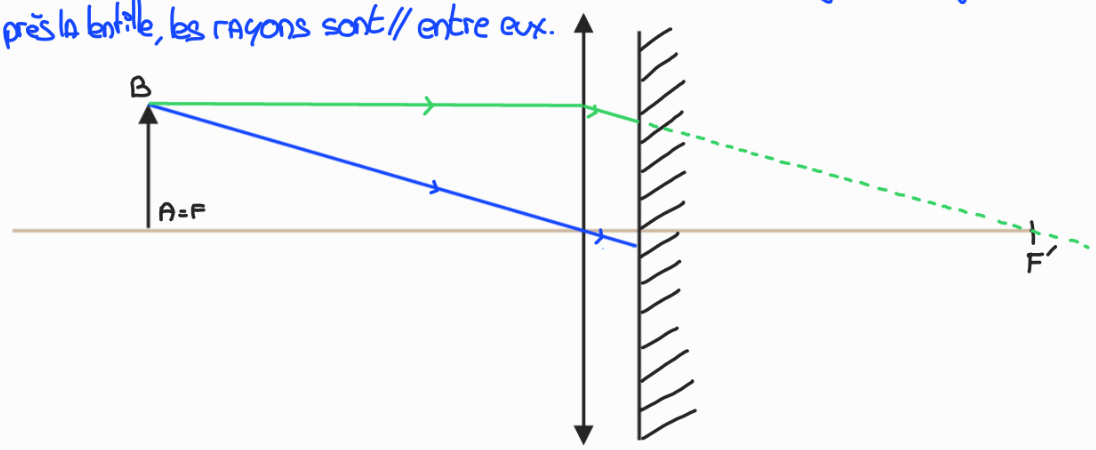
$h_{max} = 75$ cm

Exercice 3 : Focométrie : méthode d'autocollimation.

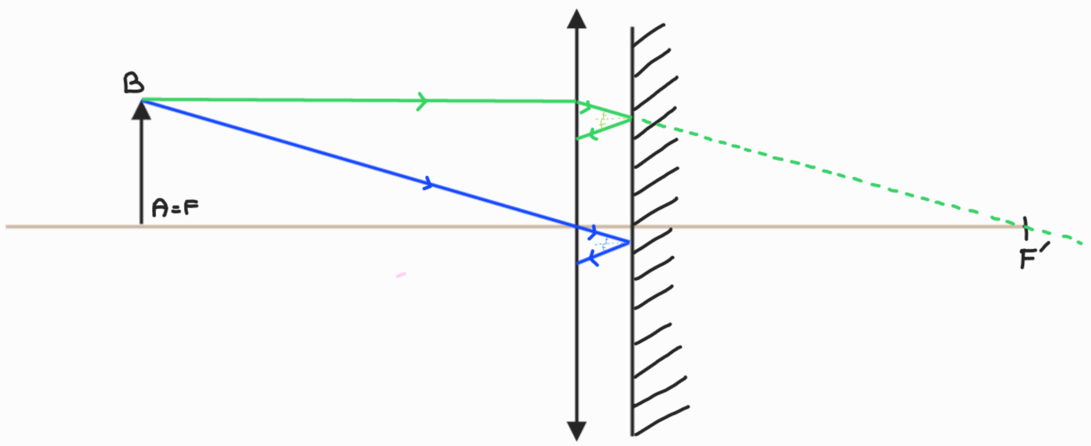
① On trace les rayons incidents

- Un rayon qui passe par le centre optique O n'est pas dévié.
- Un rayon incident // à l'axe optique émerge en passant par le foyer image principal F'.

Après la lentille, les rayons sont // entre eux.

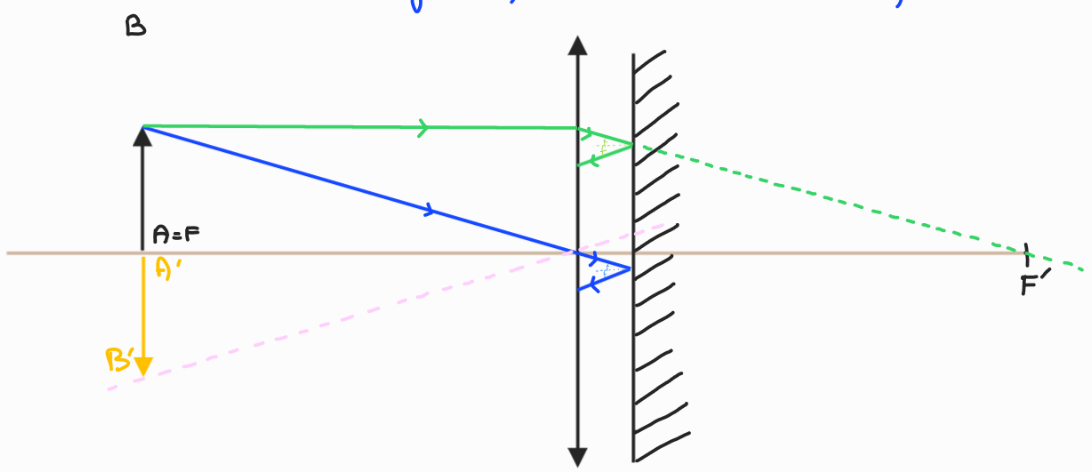


② On utilise la loi de la réflexion sur le miroir.

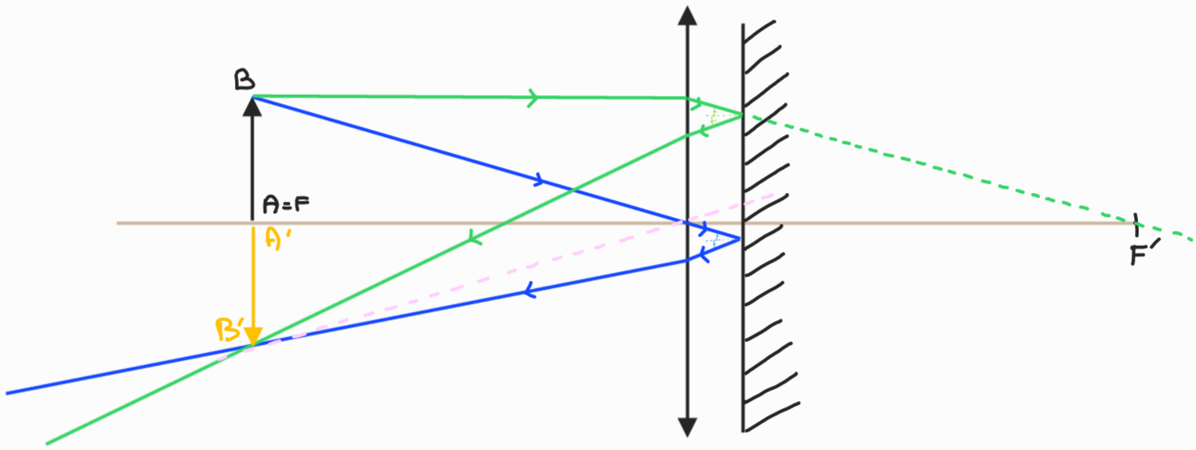


③ On trace un rayon fictif ------ // aux deux autres (— et —) qui passe par le centre optique O (comme ça on connaît la règle de tracé :)).

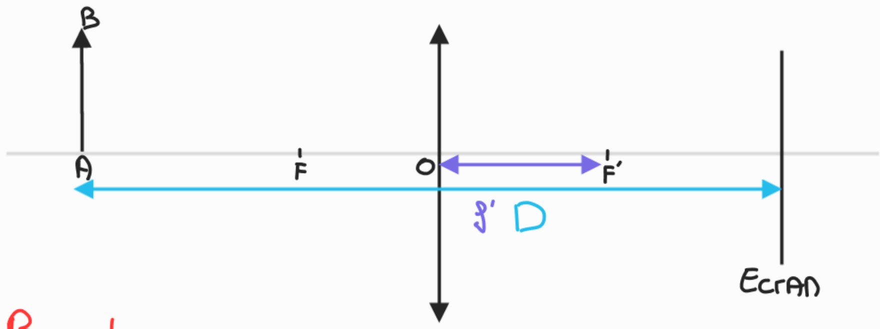
=> on sait où se forme l'image B' : les rayons étant // entre eux mais inclinés par rapport à l'axe optique, l'image se forme dans le plan focal image (comme au retour la lumière se propage de la droite vers la gauche, PFO et PFI sont "inversés")



④ Ils ne reste plus qu'à tracer les rayons en sortie de lentille, après réflexion sur le miroir plan.



Exercice 4 : Méthodes de Bessel et de Silbermann



Méthode de Bessel

1) On a la distance $D = \overline{AA'}$ qui est fixée. On peut déplacer la lentille.

$D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -\overline{OA} + \overline{OA'}$ donc $\overline{OA'} = D + \overline{OA}$

La relation de conjugaison relie position de l'objet et position de l'image.
En utilisant la relation de Descartes (origine au centre) on a

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{\overline{OA}+D} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff \overline{OA} - \overline{OA} - D = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OA}D}{f'}.$$

On a donc $\overline{OA}^2 + D\overline{OA} + Df' = 0$ Polynome du 2nd degré en $\overline{OA}$.
Il existe deux positions distinctes pour lesquelles une image nette se forme sur l'écran si le discriminant $\Delta = D^2 - 4Df' > 0$ (= le polynome a 2 racines réelles).
La condition peut donc s'écrire $\boxed{D > D_{min} = 4f'}$

Ces deux positions sont

$$\boxed{\overline{OA_1} = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{OA_2} = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}}$$

2) $d = |\overline{OA_2} - \overline{OA_1}| = \left(\frac{-D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}\right) - \left(\frac{-D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}\right) = \sqrt{D^2 - 4Df'}$

$$d = \sqrt{D^2 - 4Df'} \iff d^2 = D^2 - 4Df' \iff \boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

Méthode de Silberman

3) Une seule position si le discriminant du polynome d'ordre 2 trouvé pour $\overline{OA}$ est nul,
ie si $D'^2 - 4D f' = 0$ soit $\boxed{D' = 4 f'}$

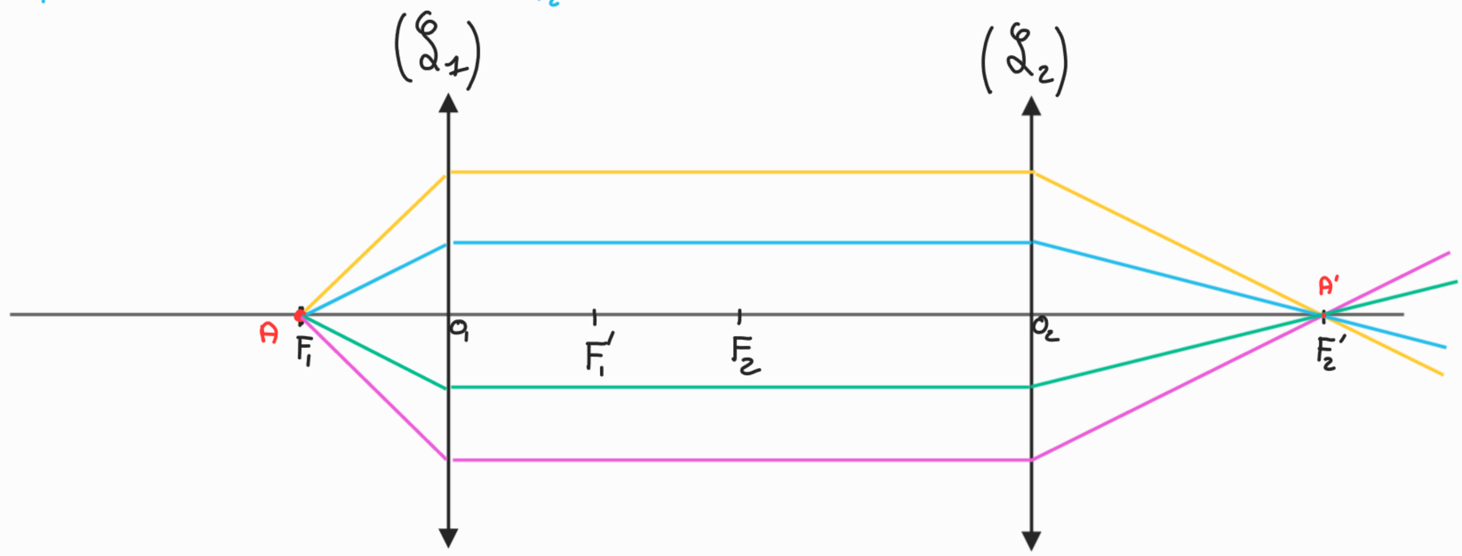
4) Cette méthode n'est pas utilisable pour une lentille divergente.
En effet, l'image d'un objet réel par une lentille divergente est virtuelle, et ne peut donc pas être projetée sur un écran.

Exercice 5 : Focométrie : méthode de Badal

1)

Etape 1 :

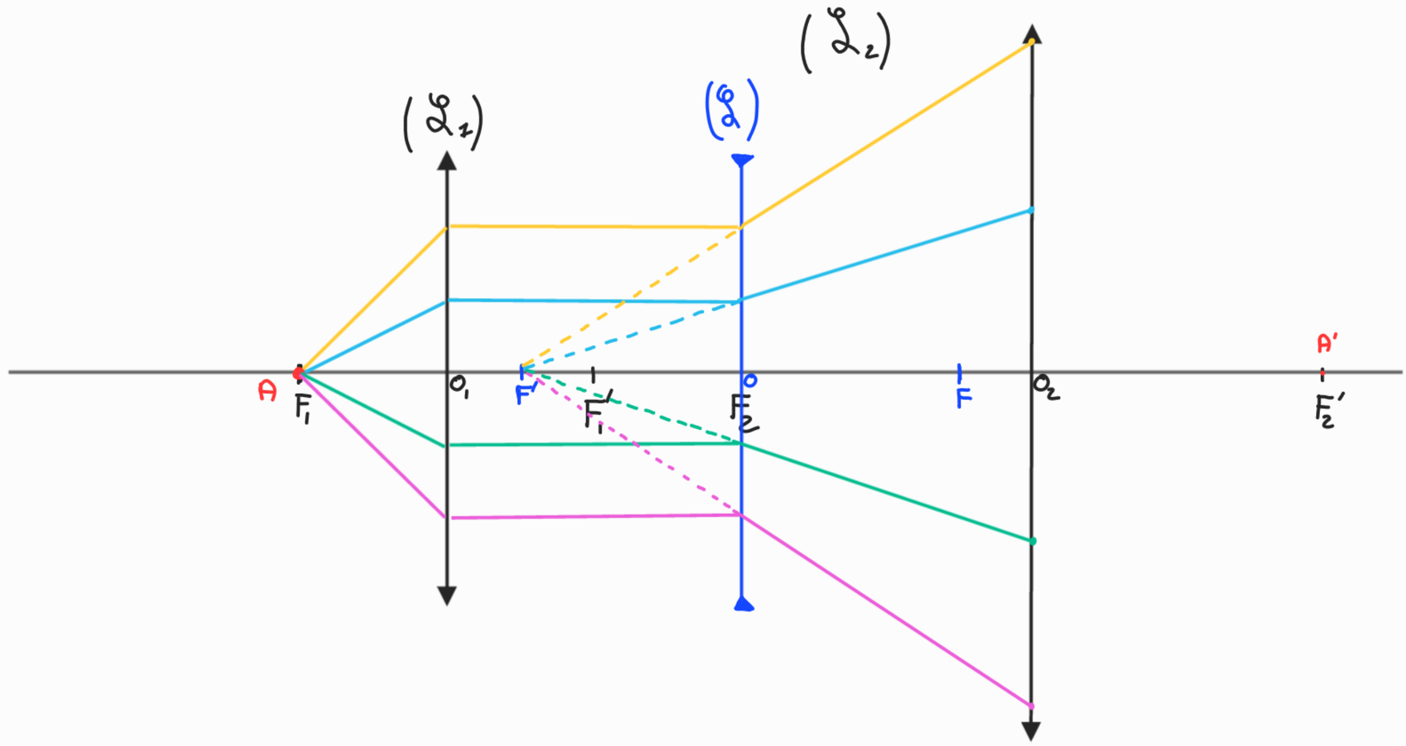
$$\underset{= F_1}{A} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \underset{\text{à l'infini}}{A_{int}} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \underset{= F_2'}{A'}$$

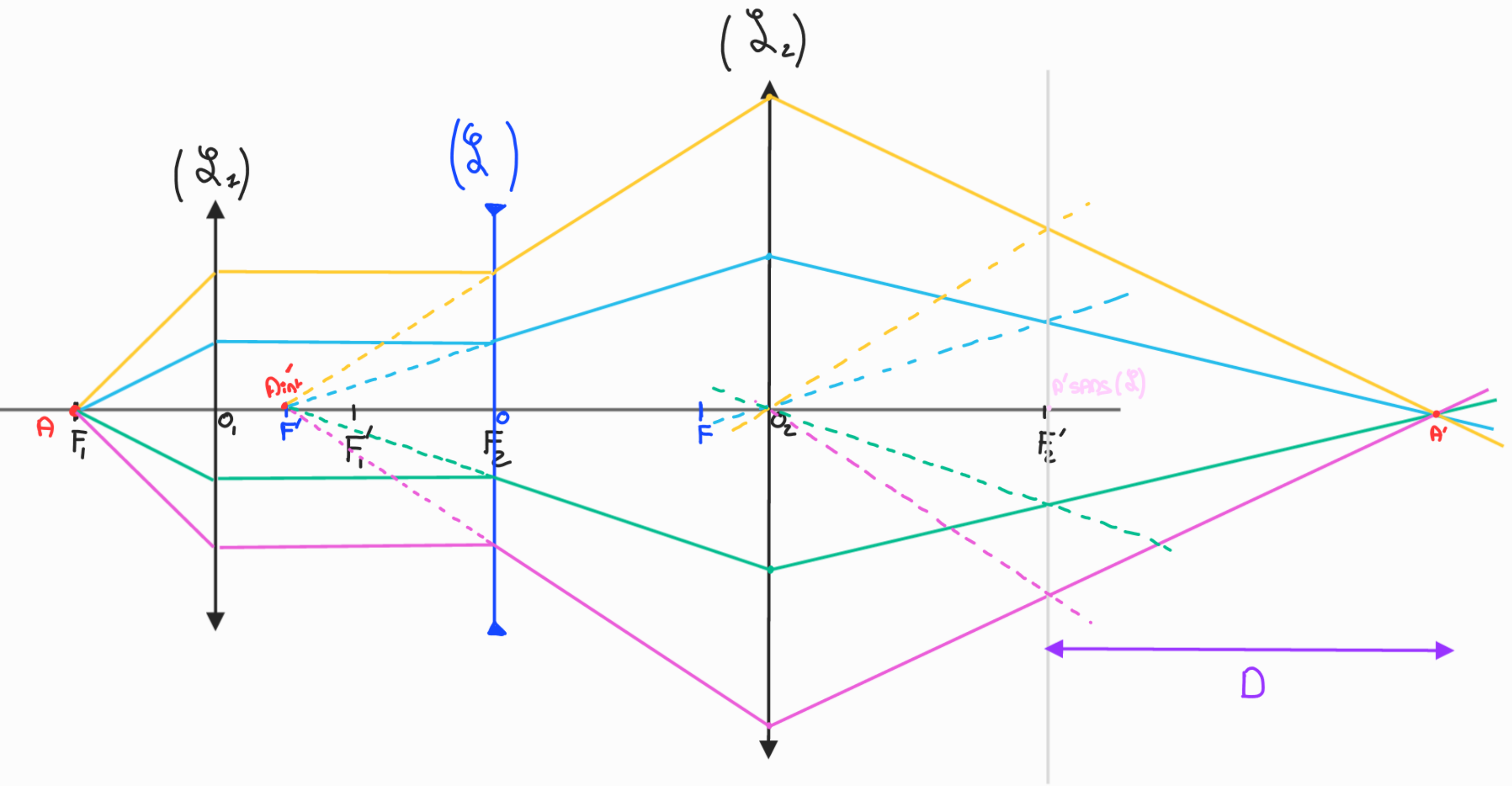


2)

Etape 2 :

$$\underset{= F_1}{A} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \underset{\substack{\text{image} \\ \text{à l'infini}}}{A_{int}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \underset{= F'}{A'_{int}} \xrightarrow[\substack{\text{relation de} \\ \text{conjugaison}}]{\mathcal{L}_2} A$$





3) $D = \overline{F'_2A'}$

Relation de conjugaison à la lentille $(\mathcal{L}_2)$:

- Relation de Descartes: $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A'_{int}}} = \dfrac{1}{f'_2}$

⚠ Bien repérer "quel objet est conjugué avec "quelle image" pour la lentille $(\mathcal{L}_2)$.

Avec $\overline{O_2A'} = f'_2 + D$ et $\overline{O_2A'_{int}} = \overline{O_2\underset{F_2}{O}} + \overline{O\underset{F'}{A'_{int}}} = \overline{O_2F_2} + \overline{OF'} = f'_2 + f'$

On a donc $\dfrac{1}{f'_2+D} - \dfrac{1}{f'_2+f'} = \dfrac{1}{f'_2}$

$$\frac{f'_2+f' - f'_2 - D}{(f'_2+D)(f'_2+f')} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\cancel{f'f'_2} + \cancel{Df'_2} = f'^2_2 + \cancel{f'f'_2} + \cancel{Df'_2} + Df'$$

$$\boxed{f' = -\frac{f'^2_2}{D}}$$

- Relation de Newton : $\overline{\underbrace{F_2}_{O}\underbrace{A'_{int}}_{F'}} \cdot \overline{F_2'A'} = -f_2'^2$

$$f' \cdot D = -f_2'^2$$

$$\boxed{f' = \frac{-f_2'^2}{D}}$$

c'était plus simple :)
mais les 2 sont possibles
(et heureusement !).

4) $f' = -24$ cm (Rappel : $f' < 0$ pour une lentille divergente).

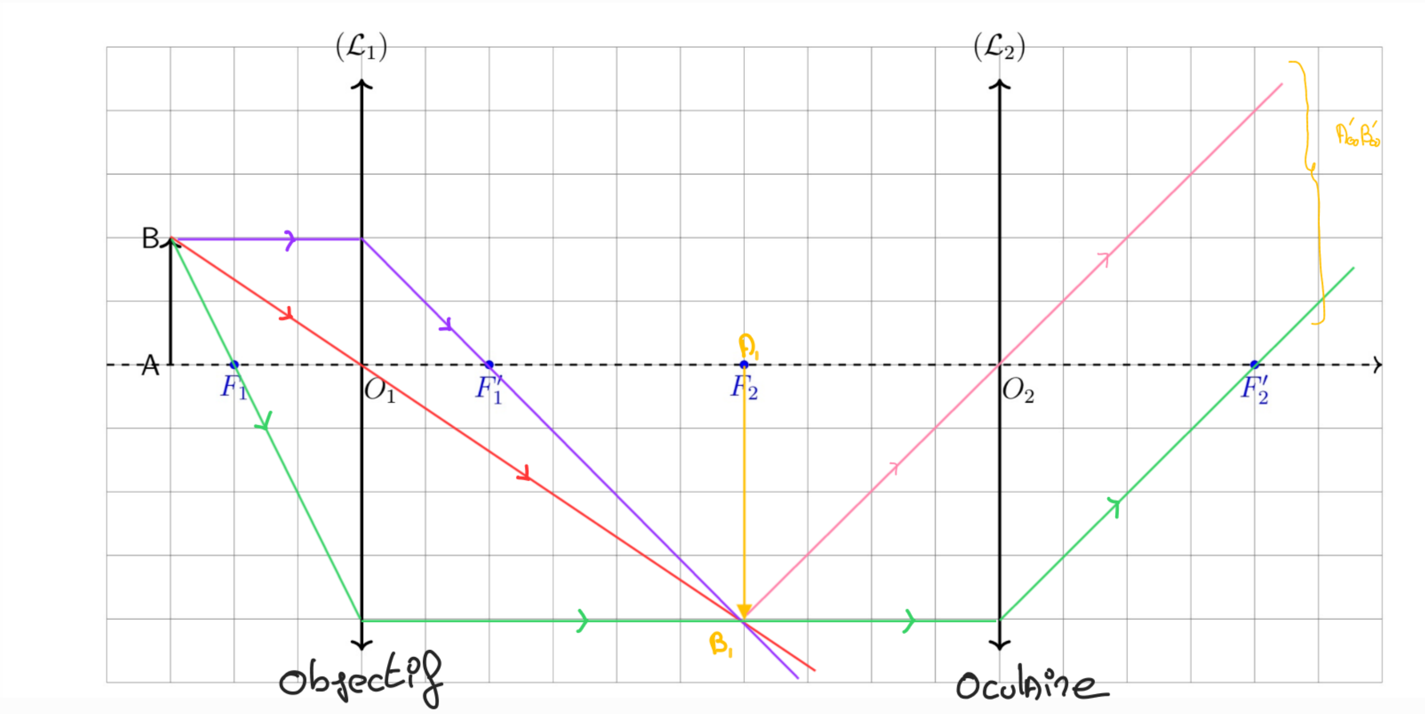
Exercice 6 : Étude d'un microscope

1) Pour observer l'image en sortie de microscope sans fatigue visuelle (= sans accomoder), l'image doit se former à l'infini (en sortie de microscope).

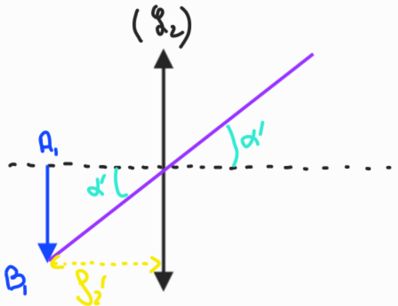
Il faut donc que l'image intermédiaire formée par l'objectif se forme dans le plan focal objet de l'oculaire. C'est un objet réel pour l'oculaire.

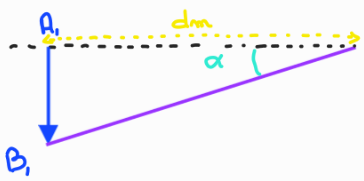
Pour que l'image finale soit grossie, il faut que l'image intermédiaire soit agrandie par l'objectif.

$$\boxed{AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \underbrace{A_{int}B_{int}}_{=F_2} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'B' \text{ à l'infini}}$$



2) On s'interesse à l'oculaire seul :





α Angle le plus grand sous lequel on peut voir l'objet avec un oeil qui accomode (si on éloigne l'objet, son diamètre apparent diminue).

$G_0 = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

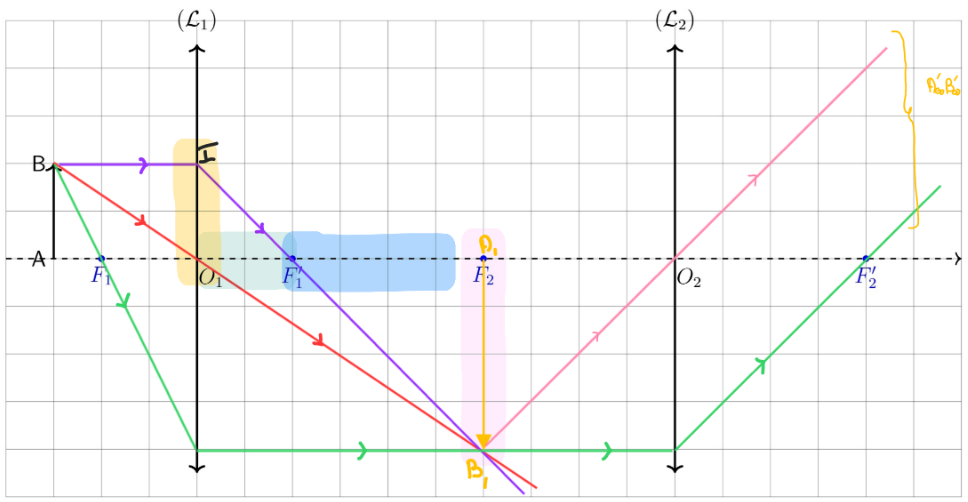
- $\alpha' \simeq \tan\alpha' = \dfrac{A_1B_1}{f'_2}$
- $\alpha \simeq \tan\alpha = \dfrac{A_1B_1}{d_m}$

$G_0 = \dfrac{d_m}{f'_2}$ $\boxed{f'_2 = \dfrac{d_m}{G_0}}$ $f'_2 = 2{,}0\,\text{cm}$

3) On s'intéresse maintenant à l'objectif seul :

Rq : On s'attend à avoir $\gamma_1 < 0$ car $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{AB}$ de signes opposés (image intermédiaire renversée)

En se basant sur la figure



Thalès :

$$\frac{\overline{O_1I}}{\overline{A_1B_1}} \; {\scriptstyle >0 \atop <0} = \frac{\overline{F_1'O_1}}{\overline{F_1'A_1}} \; {\scriptstyle <0 \atop >0}$$

Avec $\overline{O_1I} = \overline{AB}$

on a alors $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{F_1'O_1}}$

On a donc $\gamma = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{F_1'O_1}} = \dfrac{\overline{F_1'F_2}}{-f_1'} = \dfrac{\Delta}{-f_1'}$ $\quad \boxed{\gamma_1 = -\dfrac{\Delta}{f_1'}}$

On vient en fait de retrouver la relation de grandissement avec origine aux foyers :)

4) Pour relier position de l'objet $\overline{O_1A}$ et position de l'image $\overline{O_1A_1}$, utilisons une relation de conjugaison

- Avec origine au centre (relation de Descartes) :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$

$$\overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1A_1}f_1'}{f_1' - \overline{O_1A_1}} = \frac{(f_1'+\Delta)\times f_1'}{f_1'-(\Delta+f_1')} \qquad \boxed{\overline{O_1A} = \frac{(f_1'+\Delta)\,f_1'}{-\Delta}}$$

AN $f_1' = -0{,}41$ cm

- Avec origine au foyer (relation de Newton) :

$$\overline{F_1A}\,\underbrace{\overline{F_1'A_1}}_{\Delta} = -f_1'^2$$

$$\overline{F_1A} = \underbrace{\overline{F_1O_1}}_{=-\overline{O_1F_1}=-f_1=f_1'} + \overline{O_1A} = \frac{-f_1'^2}{\Delta} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} - f_1' \qquad \boxed{\overline{O_1A} = -\frac{f_1'(\Delta+f_1')}{\Delta}}$$

On trouve le même résultat, et heureusement ! :)

5) $\tan\alpha'' = \left|\frac{\overline{AB}}{d_m}\right|$ $\tan\alpha'' \simeq \alpha''$ aux petits angles donc $\alpha'' = \frac{\overline{AB}}{d_m}$ >0 >0

$\tan\alpha' = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{f_2'}$ (déjà établi) $\tan\alpha' \simeq \alpha'$ aux petits angles donc $\alpha' = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{f_2'}$

on a donc $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{f_2'} \times \frac{d_m}{\overline{AB}} = G_0 \times |\gamma|$

$$\boxed{G_c = G_0 \cdot |\gamma|}$$

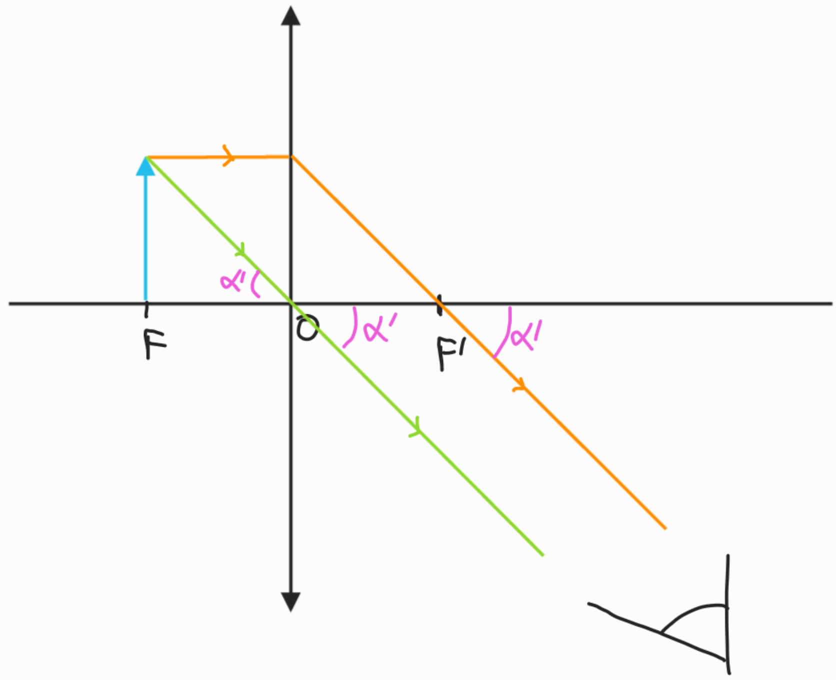
Le grossissement commercial du microscope est le produit du grandissement de l'objectif et du grossissement de l'oculaire. C'est ce que vous faisiez en SVT au lycée ! :)

Exercice 7 : La loupe

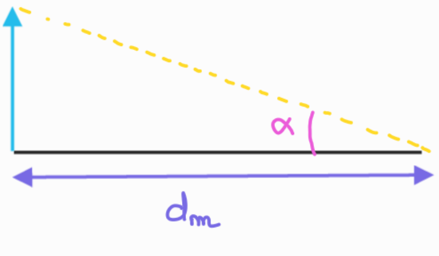
1) Une image donnée par une loupe ne peut être projetée. C'est une image virtuelle.

2) Pour observer l'image sans fatigue visuelle, elle doit se former à l'infini.
Pour ce faire, l'objet doit être situé dans le plan focal objet de la lentille.

$$\underset{= F}{A} \xrightarrow{(L)} \underset{\infty}{A'}$$



3)



- $\tan\alpha = \frac{AB}{d_m}$. Approximation des petits angles : $\tan\alpha \simeq \alpha$ $\qquad \alpha = \frac{AB}{d_m}$
- $\tan\alpha' = \frac{AB}{f'}$ Approximation des petits angles : $\tan\alpha' \simeq \alpha'$ $\qquad \alpha' = \frac{AB}{f'}$

On a donc $\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{d_m}{f'}}$

4) $f' = 1/V$ donc $G = d_m V$. AN : $G = 0{,}25 \times 10$ $\underline{G = 2{,}5}$

5) $\alpha_{lim} = 1' = 1/60° \simeq 0{,}017°$. (chapitre 3)

$AB_{lim} = d_m \times \tan(\alpha_{lim})$ $\underline{AB_{lim} = 74\ \mu m}$

$\boxed{AB_{lim} \simeq d_m\, \alpha_{lim}}$ (petits angles)

⚠ en rad

6) Avec la loupe, l'objet est vu avec un angle $\alpha' = G \cdot \alpha$

Il faut $\alpha' > \alpha_{lim}$ soit $G\alpha > \alpha_{lim}$.

$$\alpha > \frac{\alpha_{lim}}{G}$$

$$\frac{AB}{d_m} > \frac{\alpha_{lim}}{G}$$

$$\boxed{AB_{min}(\text{loupe}) = \frac{d_m\, \alpha_{lim}}{G}}$$

AN : $\underline{AB_{min}(\text{loupe}) = 29\ \mu m}$