Développements limités, développements asymptotiques, comparaison au voisinage d'un point, étude locale des fonctions d'une variable réelle

PC*2

16 septembre 2009

Préface

Table des matières

L'objet de cette note est de décrire des méthodes efficaces pour obtenir des développements limités et asymptotiques dans les situations courantes et d'étudier quelques applications : étude locale de courbes, *etc.*

Chapitre 1

Développements limités

1.1 Notations

1. La lettre I désignera toujours un intervalle non réduit à un point.
2. On étudie une fonction f au voisinage d'un réel a. La partie A sur laquelle est définie f est supposée contenir un ensemble de la forme :

$$]b, a[\quad \text{avec } -\infty \leq b < a \quad \textit{resp} \quad]a, b[\quad \text{avec } a < b \leq +\infty$$

   On dira qu'on travaille au voisinage de a_+ *resp* a_- si on considère la restriction de l'application f à $A \cap [a, +\infty[$ *resp* $]-\infty, a] \cap A$.
3. On notera $\mathcal{D}_A$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs réelles, admettant, pour tout entier naturel n, un développement limité au voisinage de a d'ordre n (DLn) :

$$\boxed{f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0}$$

   Où P est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On appelle :
   - Partie régulière du développement limité, la fonction polynôme $x \mapsto P(x-a)$.
   - Terme complémentaire, le terme $(x-a)^n \epsilon(x)$ encore noté $o((x-a)^n)$.
4. On supposera, le plus souvent, que f n'est pas plate au voisinage de a c'est à dire qu'il existe un entier naturel p et un coefficient $a_p \neq 0$ tels que :

$$\boxed{f(x) \sim a_p (x-a)^p \quad \text{au voisinage de } a}$$

La fonction $x \mapsto a_p(x-a)^p$ s'appelle partie principale de f au voisinage de a.

5. On dira que le développement limité de f est **normal** si on se trouve dans la situation ci-dessus avec $p = 0$ **c'est-à dire qu'il commence par une constante non nulle**.
6. En pratique, on écrira le développement ci-dessus sous la forme :

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) \quad \text{quand } h \to 0}$$

1.2 Développements limités classiques

Se reporter à son cours de première année. Ces développements sont donnés au voisinage de 0. On les obtient *via* :

- le théorème d'intégration des développements limités :
  Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{C})$, $a \in I$, si f' admet au voisinage de a le développement limité d'ordre n :*

$$f'(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) \quad \textit{quand } h \to 0$$

  alors f admet au voisinage de a le développement limité d'ordre $n+1$:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{n+1}) \quad \textit{quand } h \to 0}$$

- La formule de Taylor-Young :
  Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{C})$, $a \in I$, alors f admet au voisinage de a le développement limité :*

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \textit{quand } h \to 0}$$

Exemple 1. Les hypothèses du théorème d'intégration ne sont pas difficiles mais exigent que l'on fasse preuve d'un minimum de soin. Voici un exemple utile : Trouver un développement limité à l'ordre 5 de la fonction :

$$x \mapsto \text{Arcsin}(1 - x^2)$$

au voisinage de 0.

Démonstration. La fonction en question est définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. En fait, elle n'est pas forcément dérivable en 0 car l'arc sinus n'est pas dérivable au point 1. Comme elle est paire, on va travailler sur $[0, 1]$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\sqrt{2}$. On utilise alors un résultat important du cours de première année : **le théorème de la limite de la dérivée** qui est une conséquence du théorème des accroissements finis.

On en vérifie soigneusement les hypothèses :
- f est continue sur $[0, 1]$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$.
- $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\sqrt{2}$.

alors, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $f'(0) = -\sqrt{2}$.
On peut maintenant utiliser le théorème d'intégration des développements limités sous réserve que f' ait un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 ce qui est le cas :

$$f'(x) = -\sqrt{2} - 1/4\,\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{32}\,\sqrt{2}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Le théorème d'intégration des développements limités, cité plus haut, fournit alors, compte tenu de ce que $f(0) = \pi/2$:

$$f(x) = 1/2\,\pi - \sqrt{2}x - 1/12\,\sqrt{2}x^3 - \frac{3}{160}\,\sqrt{2}x^5 + o\left(x^5\right)$$

Comme f est paire, elle admet, **non pas un développement limité ordinaire mais un développement limité généralisé au voisinage de** 0 :

$$\boxed{f(x) = 1/2\,\pi - \sqrt{2}|x| - 1/12\,\sqrt{2}|x|^3 - \frac{3}{160}\,\sqrt{2}|x|^5 + o\left(|x|^5\right)}$$

On obtient également le **développement asymptotique** de l'arc sinus au voisinage de 1. quand $h \to 0_+$:

$$\boxed{\operatorname{Arcsin}(1-h) = 1/2\,\pi - \sqrt{2}\sqrt{h} - 1/12\,\sqrt{2}h^{3/2} - \frac{3}{160}\,\sqrt{2}h^{5/2} + o(h^{5/2})}$$

Utile dans certaines questions sur les séries et qu'il importe donc de savoir retrouver (mais surtout pas de connaitre par cœur) □

1.3 Opérations

1.3.1 Troncature

Si On connait un développement limité de f d'ordre n au voisinage de a, on en obtient un développement limité d'ordre $m \leq n$ en ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré $\leq m$.

1.3.2 Combinaisons linéaires

Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}_A$, il en est de même de $\phi = \lambda f + \mu g$ où λ et μ sont réels. Pour obtenir un développement de ϕ à l'ordre n au voisinage de a il suffit d'avoir un tel développement pour f et g :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \qquad g(a+h) = Q(h) + o(h^n)$$

$$\phi(a+h) = R(h) + o(h^n) \quad \text{avec } R = \lambda P + \mu Q$$

R est bien un polynôme de degré $\leq n$.
Application : Développements limités des fonctions paires et impaires au voisinage de 0.

1.3.3 Produit

Cas de deux développements normaux Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}_A$, admettant chacune un développement limité normal au voisinage de a :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \qquad g(a+h) = Q(h) + o(h^n)$$

avec $a_0 = P(0) \neq 0$ et $b_0 = Q(0) \neq 0$. il en est de même de $\phi = fg$. Pour obtenir un développement de ϕ à l'ordre n au voisinage de a il suffit d'avoir un développement d'ordre n pour f et g. Il vient alors :

$$\phi(a+h) = R(h) + o(h^n)$$

Où R est le polynôme obtenu en tronquant PQ à l'ordre n.

Démonstration. Si l'on écrit :

$$f(a+h) = P(h) + h^n \epsilon_1(h) \qquad g(a+h) = Q(h) + h^n \epsilon_2(h)$$

avec $\epsilon_i(h) \to 0$ quand $h \to 0$:

$$\phi(a+h) = P(h)Q(h) + h^n \epsilon_3(h)$$

et :

$$\epsilon_3(h) = \epsilon_1(h)Q(h) + \epsilon_2(h)P(h) + h^n \epsilon_1(h)\epsilon_2(h)$$

On voit que $\epsilon_3(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Il vient alors :

$$P(h)Q(h) = \sum_{k=0}^{2n} c_k h^k = R(h) + \sum_{k=n+1}^{2n} c_k h^k = R(h) + h^n \epsilon_4(h)$$

avec $\deg R \leq n$ et $\epsilon_4(h) \to 0$ quand $h \to 0$. En posant :

$$\epsilon(h) = \epsilon_3(h) + \epsilon_4(h)$$

Il vient $\epsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ et :

$$\phi(h) = R(h) + h^n \epsilon(h)$$

□

Remarque 1. Ce qui précéde n'utilise pas le caractère normal des développements limité, les lecteurs se convaincront cependant que ce calcul est optimal dans le cas où les deux développements limités sont normaux **c'est à dire que pour connaitre un développement limité d'ordre n de fg, il est nécessaire et suffisant de connaitre f et g au même ordre n, ni plus, ni moins**

Exemple 2. Trouver un développement limité à l'ordre 6 de la fonction y :

$$x \mapsto \frac{\cos x}{1-x}$$

au voisinage de 0. On présente les calculs de la manière suivante :

Recherche des parties principales : Quand $x \to 0$:

$$\cos x \sim 1 \qquad \frac{1}{1-x} \sim 1$$

Ces deux fonctions admettant des développements limités normaux à tout ordre, on obtient un développement limité à l'ordre 6 de leur produit en développant chacune d'elle au même ordre 6 :

Calcul :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o\left(x^6\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + o\left(x^6\right) \tag{1.2}$$

On calcule alors le coefficient de chaque puissance de x :

$$1 \leftarrow 1, \quad x \leftarrow x, \quad x^2 \leftarrow 1 - 1/2 = 1/2, \quad x^3 \leftarrow 1 - 1/2 = 1/2$$

$$x^4 \leftarrow 1 - 1/2 + 1/24 = 13/24, \quad x^5 \leftarrow 1 - 1/2 + 1/24 = 13/2$$

$$x^6 \leftarrow 1 - 1/2 + 1/24 - 1/720 = 389/720$$

On voit bien que tous les coefficients calculés sont utilisés d'où :

$$\boxed{y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{13}{24}x^5 + \frac{389}{720}x^6 + o\left(x^6\right)}$$

Cas de deux développements quelconques En pratique, si on veut un développement limité d'ordre n de fg, on optimise les ordres auxquels on développe f et g **en mettant leurs parties principales en facteur. Plus ces parties principales sont de degrés élevés, plus le calcul est simple**

Exemple 3. Développer la fonction :

$$y(x) = \left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right) \sin\left(x^3\right)$$

àl'ordre 7 au voisinage de 0.

Recherche des parties principales :

$$\mathrm{e}^{x^2} - 1 \sim x^2 \qquad \sin\left(x^3\right) \sim x^3$$

On met ces parties principales en facteurs. **On prépare le calcul sous la forme** :

$$\mathrm{e}^{x^2} - 1 = x^2 \overbrace{(1 + \dots)}^{u} \qquad \sin\left(x^3\right) = x^3 \overbrace{(1 + \dots)}^{v}$$

d'où :

$$y(x) = x^5 \overbrace{(1 + \dots)}^{uv}$$

Comme u et v admettent des développements limités normaux, le produit uv sera développé à l'ordre n quand u **et** v **seront développés à ce même ordre** n.

Ici on veut, à cause du x^5 en facteur : $n + 5 = 7$ *ie* $n = 2$. Il faut donc développer $\exp(x^2) - 1$ à l'ordre 4 et $\sin(x^3)$ à l'ordre 5.

Calcul effectif :

$$\mathrm{e}^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o\left(x^4\right) = x^2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)$$

$$\sin\left(x^3\right) = x^3\left(1 + o\left(x^2\right)\right)$$

D'où :

$$\boxed{y(x) = x^5\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)}$$

1.3.4 Composition

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{D}_A$. On suppose que u admet au voisinage de a la partie principale $a_p(x-a)^p$ avec $p \geq 1$ (ce qui implique que $u(x) \to 0$ quand $x \to a$). Soient $m > 0$ et $n \geq p$ deux entiers. Pour savoir développer toutes les puissances u^k ($k \geq m$) de u à l'ordre n, il suffit de savoir développer u^m à l'ordre n.*

Démonstration. Supposons qu'on ait développé u à l'ordre q.

$$u(a+h) = a_p h^p + a_{p+1} h^{p+1} + \cdots + o(h^q) \quad \text{quand } h \to 0$$

$$u(a+h) = h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + o(h^{q-p})) = h^p v(h)$$

Où v possède un développement limité d'ordre $q-p$ normalisé. On sait alors calculer un développement limité de la fonction $h \mapsto u^k(a+h)$ à l'ordre $kp + (q-p) = (k-1)p + q$ qui est une fonction croissante de k d'où le résultat. □

Mise en œuvre

On va travailler sur des exemples en dégageant les principes importants. L'exemple qui nous guidera est le suivant :

Exemple 4. Développer $y = \ln(\sin x)$ à l'ordre 6 au voisinage de $\pi/2$.

- **User de changements de variables et de fonctions pour se ramener au voisinage de** 0**. Cela impose de calculer les limites de certaines expressions intermédiaires** :
  On pose ici : $x = \pi/2 + h$, ce qui donne :
  $$y = \ln(\cos h) \quad \text{avec} \quad h \to 0$$
  La fonction intermédiaire $\cos h$ tend vers 1 quand $h \to 0$, on fait donc le changement de fonction :
  $$\cos h = 1 + u \quad \text{avec} \quad u \to 0 \text{ quand } h \to 0$$
  On est donc ramené à développer :
  $$y = \ln(1+u) \quad \text{avec} \quad u \to 0$$
- **Calculer les parties principales des fonctions intermédiaires** :
  Ici :
  $$u \sim -h^2/2 \quad \text{quand } h \to 0 \quad \text{et } \ln(1+u) \sim u$$
- **Calculer les ordres** :
  - $\ln(1+u) = u + \ldots$. Comme la plus petite puissance de u qui intervient dans le développement du logarithme est u, on devra, d'aprés le lemme ci-dessus, développer u à l'ordre 6 en h.

- Pour savoir à quel ordre développer le logarithme en u, on fait le petit calcul suivant :

$$u \sim -h^2/2, \quad u^2 \sim h^4/4, \quad u^3 \sim -h^6/8, \quad u^4 = o(h^6)$$

Donc on n'aura besoin que de u, u^2, u^3.

- **Calcul effectif** : en n'oubliant pas de mettre les parties principales en facteur pour calculer les développements limités des puissances de u :

$$\ln(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 + o(u^3)$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & u = -\frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} - \frac{h^6}{720} + o\left(h^6\right) = -\frac{h^2}{2}\left(1 - \frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{360} + o\left(h^4\right)\right) \\
-1/2 & u^2 = \frac{h^4}{4}\left(1 - \frac{h^2}{6} + o\left(h^2\right)\right) \\
1/3 & u^3 = -\frac{h^6}{8}\left(1 + o(1)\right) \\
\hline
 & y = -\frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{12} - \frac{h^6}{45} + o\left(h^6\right)
\end{array}$$

Remarque 2 *(Au sujet des changements de fonction).* : On a intérêt à utiliser au maximum les propriétés algébriques des fonctions étudiées :

Exponentielles : Si $y = \exp(z)$ avec $z \to a$, poser $z = a + u$ et travailler avec $\exp(u)$ puisque $u \to 0$.

Fonctions trigonométriques : Même chose, y compris pour les fonctions trigonométriques hyperboliques.

Logarithmes : Si $y = \ln(z)$ avec $z \to a > 0$, poser $z = a(1+u)$. Ce qui ramène à $\ln(1+u)$ avec $u \to 0$.

Puissances : Même chose. En anticipant les développements asymptotiques, on peut aussi remarquer que si $z \to 0_+$ avec $z \sim v$ où v est un équivalent simple, on a intérêt à poser : $z = v(1+u)$.

Exemple 5. Développer $y = \sqrt{\operatorname{ch} x - \cos x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0. Vu la parité de la fonction (qui est définie car $\cos x \leq 1 \leq \operatorname{ch} x$), il suffit de se placer au voisinage de 0_+.

- Posons $z = \operatorname{ch} x - \cos x$. Il vient $z \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui amène à chercher sa partie principale *via* de **petits** développements limités :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) && (1.3) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) && (1.4) \\ z &= x^2 + o(x^2) && (1.5) \end{aligned}$$

On pose donc $z = x^2(1+u)$ avec $u \to 0$ quand $x \to 0$. On doit donc développer :

$$y = x\sqrt{1+u} \quad \text{à l'ordre 5}$$

et donc $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 4.

- Comme $u \to 0$, il vient :

$$(1+u)^{1/2} = 1 + u/2 + \dots$$

On doit donc développer u **à l'ordre** 4 **en** x. Pour savoir à quel ordre développer le radical, il est essentiel de connaitre la partie principale de u, ce qui se fait en poussant les développements limités (1.3) et (1.4) :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) && (1.6) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) && (1.7) \\ z &= x^2 + o(x^4) && (1.8) \end{aligned}$$

C'est insuffisant, on pousse encore d'un cran :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6) && (1.9) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) && (1.10) \\ z &= x^2 + \frac{x^6}{360} + o(x^6) && (1.11) \end{aligned}$$

donc $u \sim x^4/360$. Comme $u^2 = o(x^4)$, le terme en u suffit.

– Il vient donc :

$$(1+u)^{1/2} = 1 + u/2 + o(u) = 1 + \frac{x^4}{720} + o(x^4)$$

$$y = x + \frac{x^5}{720} + o(x^5) \quad \text{au voisinage de } 0_+$$

Compte tenu de la parité de y, on a au voisinage de 0 le développement limité généralisé :

$$\boxed{y = |x| + \frac{|x|^5}{720} + o(|x|^5)}$$

Quotient

Pour développer un quotient N/D on **met les parties principales de** N **et** D **en facteur** puis on traite le quotient des deux développements limités normaux obtenus comme un produit *via* $(1+u)^{-1}$. La règle essentielle est la suivante :
Pour développer à un ordre n **un quotient de deux développements limités normaux, on développe le numérateur et le dénominateur à l'ordre** n.

Exemple 6. Développer :

$$y = \sqrt{\frac{\operatorname{Arctg} x^2}{\cos x}}$$

à l'ordre 5 au voisinage de 0_+.

$$\boxed{y = x + \frac{x^3}{4} - \frac{3x^5}{32} + o\left(x^5\right)}$$

Exemple 7. Développer :

$$y = \frac{\ln(\sin x)}{\cos x}$$

à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/2$.

Exercice 1 (Mines 2008). Soit $\alpha \in]0,1[$ et :

$$a(x) = \alpha^2 \cos x - \mathrm{i}\alpha \sin x + 1 - \alpha^2$$

1. Montrer que $|a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions :

$$x \mapsto \ln(|a(x)|^2) \quad \text{et} \quad \arctan \frac{\Im(a(x))}{\Re(a(x))}$$