Devoir à la maison

Exercice 1. *Etudes de fonctions*

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$$

   Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, les limites de f aux bords de D_f, réaliser un tableau de variations.

2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 2. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2}.$$

1. Étude de f_6 :
   (a) Mettre $f_6(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.
   (b) Représenter $\mathcal{C}_{f_6}$ dans un repère orthonormé.
2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E) \;\; x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2} = 0$$

   (a) Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m, et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m.
   (b) Discuter, selon la valeur du paramètre m, l'ensemble des solutions de l'équation (E) ci-dessus.

Exercice 3. *Majoration d'une famille de fonctions*

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on pose pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$f_r(x) = (1+x)^r - 1 - rx$$

Le but de ce problème est de montrer que pour $r \in \left\{-2, -1, \frac{1}{2}, 2\right\}$, il existe une constante A_r telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \;,\;\; |f_r(x)| \leq A_r x^2$$

et de trouver la meilleure constante A_r possible, qui sera notée A'_r

1. On suppose que : $r = 2$.
   Calculer $f_2(x)$ et montrer que $A'_2 = 1$.
2. On suppose que : $r = -1$.
   (a) Calculer $f_{-1}(x)$.
   (b) Montrer que :$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2x^2$.
   (c) Montrer que :$A'_{-1} = 2$.
3. On suppose que : $r = -2$.
   (a) Calculer $f_{-2}(x)$.
   (b) Montrer que :$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} - (1-2x) \leq 8x^2$.
   (c) Montrer que :$A'_{-2} = 8$.
4. On suppose que : $r = \frac{1}{2}$.
   (a) Calculer $f_{\frac{1}{2}}(x)$.
   (b) Montrer que :$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{x^2}{2}$.
   (c) Montrer que $\frac{1}{2}$ n'est pas la meilleure valeur possible.
   (d) Pouvez-vous déterminer $A'_{\frac{1}{2}}$?