Fonctions usuelles

Exercice 1. *Bijection*

Soit $f : [-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$
Montrer que f réalise une bijection sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser ; trouver la fonction réciproque de f.

Exercice 2. *Positivité*

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$.

Exercice 3. *Equations et inéquations*

1. Résoudre l'inéquation $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.
2. Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.
3. Résoudre l'équation $5\text{ch}x - 4\text{sh}x = 3$.
4. Résoudre l'équation $\ln(x^2-1) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0$.
5. Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

Exercice 4. *Comparaison de deux composées*

Démontrer que l'on a pour tout réel x :

$$\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$$

Indications : Restreindre l'intervalle d'étude.
Pour $X \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer et utiliser l'inégalité $\sin X < X$.

Exercice 5. *Variations et limites d'une fonction*

Faire l'étude complète (tableau de variations, limites éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$) et tracer la courbe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$$

Exercice 6. *Minoration de $x^y + y^x$ sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.*

1. Trouver le minimum de x^x pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on notera m.
2. Soient x et y deux réels tels que $0 < y \leq x < 1$. Démontrer que :
$$x^y + y^x \geq m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x}.$$
3. En déduire que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ x^y + y^x > 1$.
4. Montrer que 1 est le plus grand réel A tel que :
$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ x^y + y^x > A.$$

Exercice 7. *Simplifier*

Simplifier les expressions suivantes, où l'on a noté $\log_x(y) = \dfrac{\ln y}{\ln x}$:

$$\mathbf{1}.\ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}; \qquad \mathbf{2}.\ \log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$$

Exercice 8. *Un exercice d'oral de l'X*

Calculer $X = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$
Précision : Si $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est le réel y de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan y = x$.
Indication : A l'aide de formules trigonométriques, commencer par calculer $\tan X$.

Exercice 9. *Simplifier*

1. Simplifier les expressions suivantes :
$$\tan(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \cos(\arctan x).$$
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.
3. (a) Démontrer que, pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$.
   (b) En déduire une forme simplifiée de $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

Exercice 10. *Étude de fonctions*

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$. (Écrire la fonction en utilisant l'exponentielle, déterminer le domaine de définition de f, calculer sa dérivée, tracer la fonction.)
2. (a) Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leq x$?
   (b) Etudier la fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\exp\big(\arcsin(x)\big)$.
3. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f. Préciser la dérivée sur ce dernier ensemble.
   (b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
   (c) Démontrer que :
$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = 2\mathrm{Arctan}(x).$$
   Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de définition de f.

Exercice 11. *Une étude de fonction, fonction réciproque*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\arctan(2x+1))$.

1. Étudier le sens de variation de f, ses limites en $\pm\infty$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que la restriction de f à $[-1/2, +\infty[$ admet une fonction réciproque g dont on précisera l'ensemble de définition.
4. Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.