Rappels et compléments d'analyse.

Exercice 1. *Équations et inéquations du second degré*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+2)^2 = -1 \tag{1}$$
$$(x+2)^2 = 2 \tag{2}$$
$$(x+1)^2 = -2x+6 \tag{3}$$
$$(2x-1)^2 = -(3x-2)^2 \tag{4}$$

Résoudre également les inéquations suivantes :

$$(x+2)^2 \geq 9 \tag{1}$$
$$x^2 - 5x + 3 > 0 \tag{2}$$
$$-3x^2 + 2x - 2 > 0 \tag{3}$$
$$\frac{2x+3}{x^2-2x+3} > 1 \tag{4}$$

Exercice 2. *Équations, inéquations qui se ramènent à des problèmes du second degré*

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|x^2 - 1\right| = |x+1| \tag{5}$$
$$\sqrt{x^2+1} = x - 2 \tag{6}$$

2. Résoudre l'inéquation bicarrée suivante :

$$-3x^4 + 2x^2 - \frac{1}{4} < 0.$$

3. Résoudre l'équation suivante à l'aide du changement de variable $y = x + \frac{1}{x}$:

$$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Exercice 3. *Distance à une parabole*

Dans un repère orthonormé , on appelle $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y = x^2$.
Soit A le point de coordonnées $(6;3)$. Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe un point M appartenant à $\mathcal{P}$ tel que la distance AM soit minimale. On admettra que AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale.

1. Soit un point M d'abscisse x appartenant à $\mathcal{P}$. Démontrer que :

$$AM^2 = x^4 - 5x^2 - 12x + 45.$$

2. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe AM^2, c'est à dire :

$$f(x) = x^4 - 5x^2 - 12x + 45.$$

   (a) Préciser sur quel intervalle f est dérivable.

(b) Calculer $f'(x)$.

(c) Montrer que 2 est une racine de $f'(x)$ (c'est à dire une solution de $f'(x) = 0$).

(d) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$f'(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Démontrer alors qu'il existe un seul point M_0 de $\mathcal{P}$, d'abscisse 2 , telle que AM est minimale.

   (b) Donner les coordonnées de M_0.

5. (a) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{P}$ au point M_0.

   (b) On appelle N le point de $\mathcal{T}_2$ d'abscisse 0. Quelles sont les coordonnées de N ?

   (c) Montrer que $AM_0^2 = 17$, que $M_0N^2 = 68$ et que $AN^2 = 85$.

   (d) Que peut-on en déduire ?

Exercice 4. *Quelques problèmes d'optimisation*

1. Un industriel souhaite réaliser une casserole de volume V. On note x le rayon de la casserole. Déterminer en fonction de x la hauteur $h(x)$ de la casserole et l'aire $A(x)$ de la surface de la casserole constituée d'un disque (le fond) et d'une portion de cylindre (le bord).

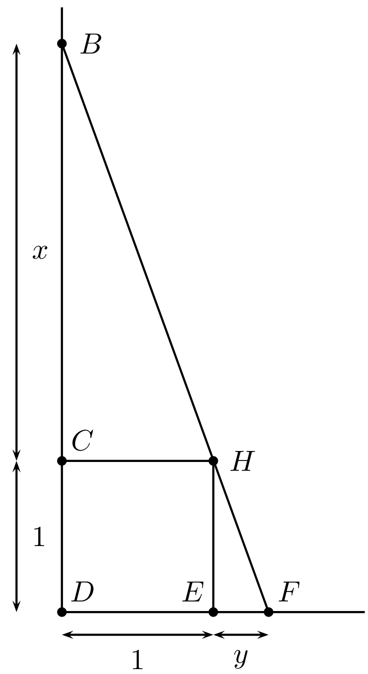
   Étudier alors la fonction A sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer la valeur x_{min} en laquelle est atteinte le minimum de A.

   Vérifier enfin que $h(x_{min}) = x_{min}$ (par le calcul, ensuite vous pourrez vérifier chez vous qu'effectivement, les casseroles communément utilisées tendent à vérifier cette règle).

2. On considère une sphère de rayon R. Déterminer volume minimal d'un cône de révolution circonscrit à la sphère.

Exercice 5. *Une échelle contre un mur*

On dispose une échelle de 4 mètres de long contre un mur, de sorte que l'échelle s'appuie également sur une caisse cubique de 1 mètre de coté posée contre le mur. Le but de ce problème est de déterminer à quelle hauteur l'échelle touche le mur. On note x la distance en mètres entre le haut de la caisse et le haut de l'échelle, y la distance en mètres entre le bas de l'échelle et la caisse.



1. Montrer que $y = \frac{1}{x}$.
2. Prouver que x est solution de l'équation :

$$x^2 + 2x - 14 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

3. A l'aide du changement de variable $u = x + \dfrac{1}{x}$, déterminer les solutions de l'équation.
4. Résoudre le problème posé au départ.

Exercice 6. *Composée de fonctions*

Soit P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$.

1. (a) Montrer que 1 est racine de P, c'est à dire solution de l'équation $P(x) = 0$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que
   $$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$
   (c) En déduire l'ensemble des racines de P (i.e. l'ensemble des solutions de $P(x) = 0$).
2. (a) Calculer la dérivée P' de P et étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variation de P après avoir étudié ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) En déduire le tableau de signe de $P(x)$ en fonction de x.
3. On pose $f = \dfrac{1}{P}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition après avoir rappelé celles de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
4. On pose $g = P^2$.
   (a) Donner les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$ après avoir rappelé celles de $x \longmapsto x^2$.

Exercice 7. *Equations paramétriques*

Discuter, pour chacune des équations suivantes, l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2mx + 6 - m = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{1}{2}x^2 + 2mx + 3m - 1 = 0 \qquad (2)$$

Exercice 8. *Paraboles paramétrées*

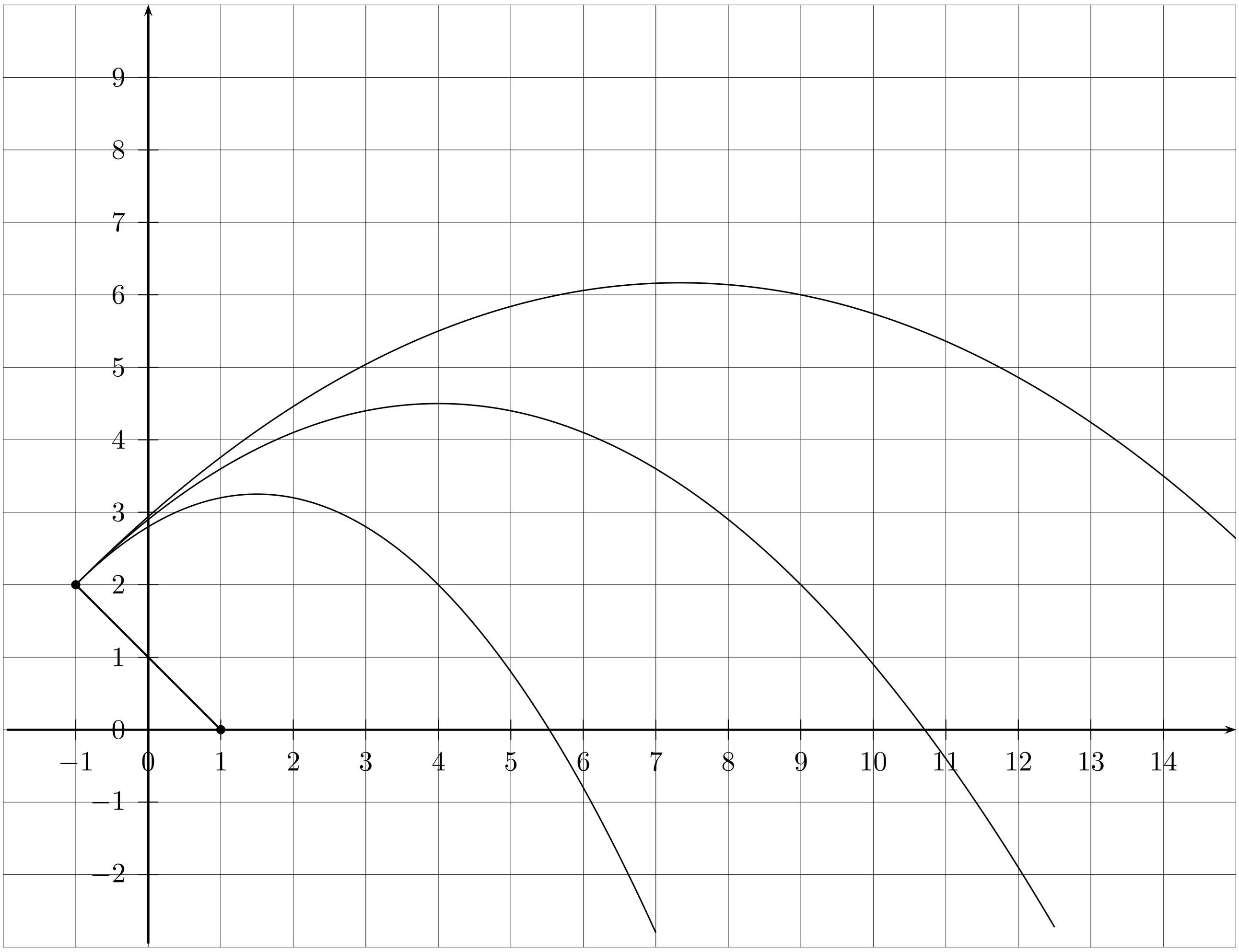
Une catapulte centrée en le point de coordonnées $(0;1)$ tire des projectiles selon un angle constant à partir du point de coordonnées $D(-1;2)$. On admet que le projectile décrit alors une parabole qui est la courbe représentative de la fonction :

$$f_m(x) = \frac{m}{2}x^2 + (2m+1)x + 2m + 4$$

Le paramètre m dépend de la vitesse initiale v_0 du projectile exprimée en $m.s^{-1}$ selon la formule $m = -\dfrac{g}{v_0^2}$, où g représente la constante de gravitation du champ terrestre exprimée en $m.s^{-2}$. On remarque en particulier que les faibles vitesses v_0 correspondent à des valeurs très fortement négatives pour m, tandis que les vitesses élevées correspondent à des valeurs de m toujours négatives mais très proches de 0. Autrement dit, le paramètre m se situe dans l'intervalle $]-\infty;0[$ et il est d'autant plus grand que le projectile est rapide.

1. On a tracé ci-derrière les courbes de $f_{-0.06}$, $f_{-0.1}$, $f_{-0.2}$. En remplaçant g par sa valeur qui est de l'ordre de 9.8, estimer les vitesses correspondantes et indiquer sur le graphe quelle courbe est représentative de quelle fonction.
2. Représenter la courbe de $f_{-0.4}$ sur le graphique ci-dessus.
3. Etudier pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $f_m(x) = 10$ a des solutions, puis indiquer les conséquences pratiques.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f_m. On prendra soin de distinguer les cas suivants : $m < 0$; $m = 0$; $m > 0$.

5. Observez les sommets des différentes paraboles précédemment tracées sur le graphique, que constatez-vous ? Sauriez-vous le prouver à l'aide des formules que vous avez données à la question précédente pour exprimer en fonction de m les coordonnées $x(m)$ et $y(m)$ du sommet de la parabole représentant f_m ?



Exercice 9. *Fonctions paires et impaires*

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$$
$$f_2(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 - 1}$$
$$f_3(x) = \frac{x^5 - x}{x^3 - 1}$$
$$f_4(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$
$$f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Exercice 10. *Symétries*

1. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie du graphe de la fonction
$$f : x \mapsto x^2 - 3x + 2.$$
2. Montrer que le point I de coordonnées $(1, 2)$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction
$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}.$$
3. Montrer que le point I de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction
$$f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}.$$

Exercice 11. *Calculs a.q.t.*

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{1+\cos(x)^2}$$
$$f_2(x) = \frac{\ln(x)}{1+e^{x^2}}$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{1+e^{x^4}}\right)}$$

Limites

Exercice 12. *Calcul de limites*

Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1 **2.** $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1

3. $\dfrac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$ **4.** $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$

Exercice 13. *Croissance comparée*

1. Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \ln(x) - x$
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$(i)\ \ln(x) \leq x$$
$$(ii)\ 0 \leq \frac{\ln(x)}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$
3. En déduire que $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 14. *Calcul de limites*

Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ **2.** $\dfrac{\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ en 0

3. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.

Exercice 15. *Avec la partie entière*

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Inégalités

Exercice 16. *Avec études de fonctions*

Dans cet exercice, on demande de prouver des inégalités, par exemple à l'aide d'études de fonctions. Voici ces inégalités :

1. $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x - 1$$

2. $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin x \leq x$$

3. $$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$$

Exercice 17. *Inégalité entre moyennes*

Prouver que la proposition suivante est vraie :

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 18. *Avec des racines carrées*

1. Si x et y sont deux réels positifs tels que $x \geq y$, prouver que :
   (a) $$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
   (b) $$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
2. Déduire de la question précédente que pour x et y deux réels, on a :
   (a) $$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$
   (b) $$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$

Exercice 19. *Variante autour de l'inégalité triangulaire*

Prouver que l'on a :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2,\ |x+2y+z| - |y| \leq |x+y| + |z|\,.$$

Prouver que l'on a aussi :

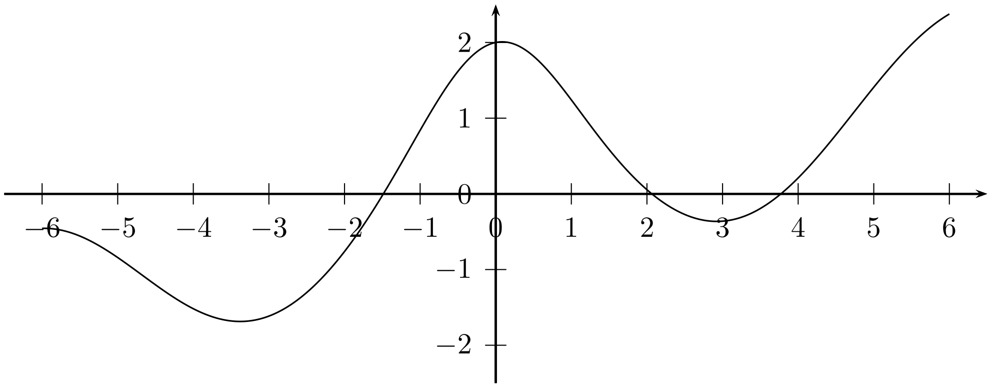
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|\,.$$

Indication : On pourra résoudre dans un premier temps le système d'inconnues x et y, $x+y=a$ et $x-y=b$.

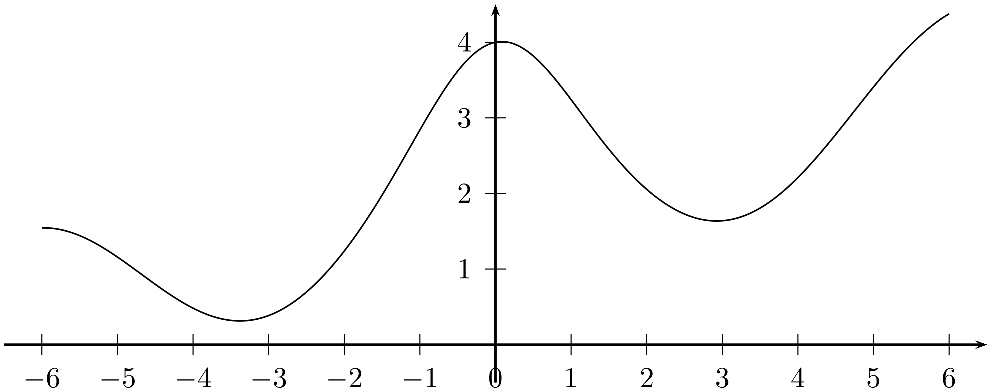
Fonctions associées

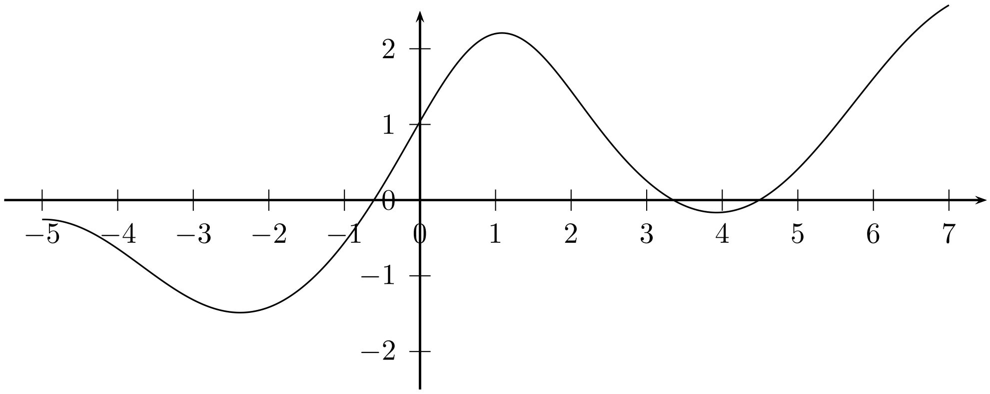
Exercice 20. *Fonctions associées*

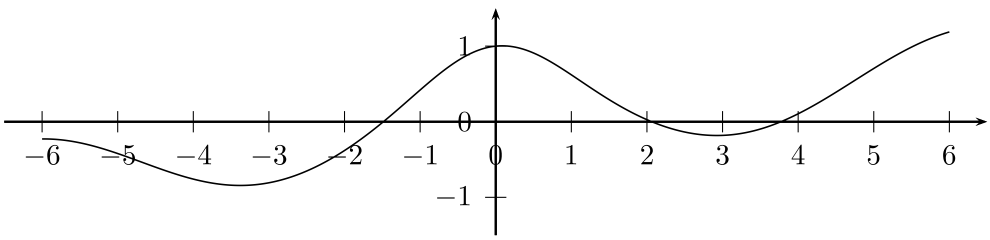
On a représenté ci-dessous le graphe d'une fonction f.

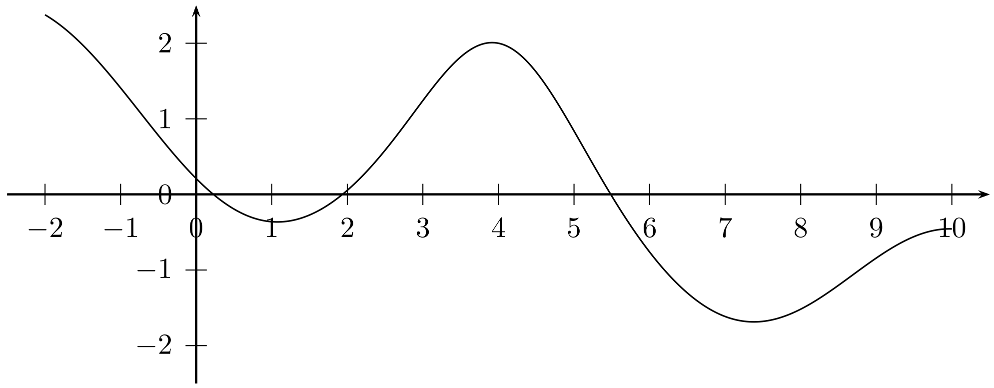


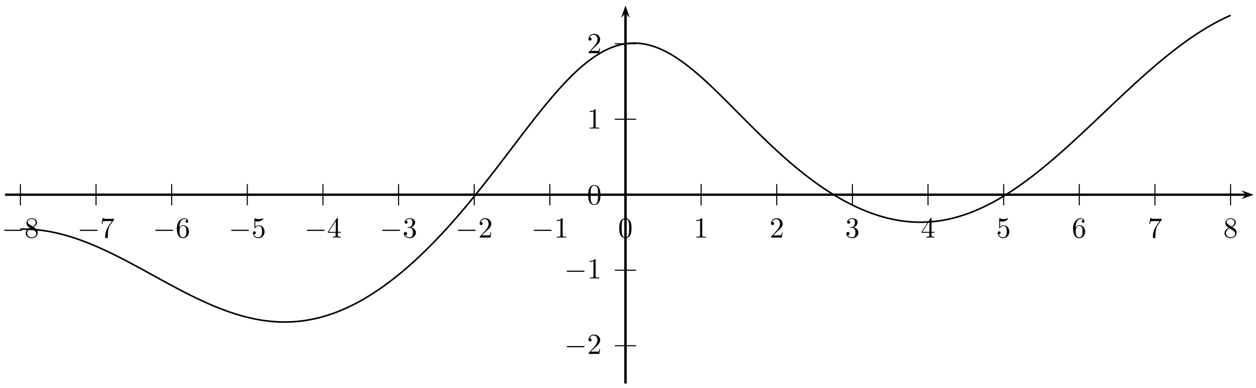
Pour chacune des fonctions suivantes dont les graphes sont obtenus à partir de celui de f à l'aide d'une translation, d'une symétrie ou d'une dilatation, préciser son expression.











Exercice 21. *Symétries de graphes*

1. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ admettent chacune un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées, où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 4} \text{ et } f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 11}{2x^2 + 4x + 6}.$$

2. Montrer que les courbe $\mathcal{C}_{g_1}$ et $\mathcal{C}_{g_2}$ admettent chacune un centre de symétrie, où $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x - 2} \text{ et } g_2(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}.$$

Trigonométrie

Exercice 22. *Avec des modulos*

Déterminer l'ensemble des solutions $\theta \in \mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

$$3\theta + \pi \equiv 2\theta - \frac{\pi}{3} \left[\frac{\pi}{2}\right] \tag{1}$$

$$3\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right] \tag{2}$$

$$2(7\theta + \pi) \equiv 5\theta - \pi[4\pi] \tag{3}$$

Exercice 23. *Liens entre les différentes fonctions trigonométriques*

1. Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin x = -\frac{3}{5}$, que vaut $\cos x$?
2. Si $x \in [0, \pi]$ et que $\cos x = -\frac{1}{3}$, que vaut $\tan x$?
3. Si $x \in \mathbb{R}$ et que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, exprimer $\tan^2 x$ en fonction de $\cos x$, puis en fonction de $\sin x$. Exprimer également dans ce cas $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\tan x$.

Exercice 24. *Équations trigonométriques basiques*

Soit $a \in [0, \pi]$, combien y a-t-il de points M_θ associés au réel θ tels que $\cos\theta = \cos a$?
Combien y a-t-il de points M_θ associés au réel θ tels que $\sin\theta = \sin a$?
Combien y a-t-il de points M_θ associés au réel θ tels que $\tan\theta = \tan a$?
Résoudre les équations suivantes :

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x \tag{1}$$
$$\sin x = \cos(2x) \tag{2}$$
$$\sin x = 2\sin x\cos x \tag{3}$$

Exercice 25. *Équations trigonométriques simples*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sqrt{3} \tag{1}$$
$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$
$$\cos(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tag{3}$$
$$\cos x(2\cos x + 1) = 1 \tag{4}$$
$$2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0 \tag{5}$$

Exercice 26. *Formules de duplication*

1. Pour $a \in [-\pi, \pi]$, exprimer $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $\cos a$.
   En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \not\equiv \pi[2\pi]$. On note $t = \tan\frac{a}{2}$.
   Rappeler l'expression de $\cos a$ et $\sin a$ en fonction de t.
   Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, en déduire l'expression de $\tan a$ en fonction de t.
   Donner enfin la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$
3. Déterminer l'ensemble des valeurs $x \in [-\pi, \pi]$ telles que :

$$2\sin x = \sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)}$$

Exercice 27. *Équations trigonométriques plus délicates*

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1 \tag{1}$$

$$\sin x + \cos x - \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2}+1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \tag{2}$$

$$1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0 \tag{3}$$

$$\cos^3 x \sin(3x) + \sin^3 x \cos(3x) = \frac{3}{4} \tag{4}$$

$$\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) - 2\cos x + 1 = 0 \tag{5}$$

$$2\sin x \cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x - (\sqrt{3}+1)\sin^2 x = 0 \tag{6}$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2 \tag{7}$$

$$\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x) \tag{8}$$

$$\cos x \cos(7x) = \cos(3x)\cos(5x) \tag{9}$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} - \tan x + \frac{1}{\tan x} = 0 \tag{10}$$

$$\cos(3x) + \sin(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

$$\sin(9x) + \sin(5x) + 2\sin^2 x = 1 \tag{12}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \tag{13}$$