# Devoir à la maison

**Exercice 1.** *Echauffement*

On note $\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer $\omega^2$, ainsi que son module et un argument.

$$\omega^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\omega^2 = 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$\omega^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$
$$\omega^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$
$$\omega^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\omega^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

   $\omega^2$ est de module 4 et $\frac{\pi}{4}$ en est un argument.

2. Déterminer alors la forme trigonométrique de $\omega$.
   Les deux racines carrées du nombre $\omega^2$ sont $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-2e^{i\frac{\pi}{8}}$. On en déduit que $\omega = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$ puisque sa partie réelle et sa partie imaginaire sont positives.

3. Calculer $\omega^9$.

$$\omega^9 = \omega^8\omega$$
$$\omega^9 = 2^8 e^{8i\frac{\pi}{8}}\omega$$
$$\omega^9 = -256\omega$$
$$\omega^9 = -256\sqrt{2+\sqrt{2}} - i256\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

**Exercice 2.** *Fonction sur $\mathbb{C}$ et équations de degré 2*

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{2i\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\},\ f(z) = \frac{z^2}{z-2i}.$$

1. Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
   On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2 = 8-6i$, c'est à dire vérifiant :

$$\begin{cases} (1)\, a^2 - b^2 = 8 \\ (2)\, 2ab = -6 \end{cases}$$

   Avec la condition que $|a+ib|^2 = \sqrt{8^2+6^2}$, i.e. $(3)\, a^2+b^2 = 10$, on obtient en ajoutant ou soustrayant (1) et (3) : $a^2 = 9$ et $b^2 = 1$. Puisque $a$ et $b$ sont de signes opposés d'après (3), on a donc : $3-i$ et $-3+i$ sont les deux racines carrées de $8-6i$.
   En déduire les antécédents de $1+i$ par $f$.

On résout :

$$\frac{z^2}{z-2i} = 1+i$$
$$z^2 = (1+i)(z-2i)$$
$$z^2 - (1+i)z + 2i - 2 = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = (1+i)^2 + 8 - 8i = 8 - 6i$.
Les antécédents de $1+i$ sont donc :

$$z_1 = \frac{1}{2}(1+i+3-i) = 2 \text{ et } z_2 = \frac{1}{2}(1+i-3+i) = -1+i.$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Discuter selon la valeur de $a$ le nombre d'antécédents de $a$ par $f$.
On cherche à résoudre :

$$\frac{z^2}{z-2i} = a$$
$$z^2 = a(z-2i)$$
$$z^2 - az + 2ia = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = a^2 - 8ia = a(a-8i)$.
Pour $a = 0$ ou $a = 8i$, l'équation a donc une unique solution et ces deux nombres n'ont qu'un seul antécédent par $f$.
Pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$, $a$ admet deux antécédents par $f$.

**Exercice 3.** *Equations dans les nombres complexes*

1. Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+1| = |z-1|$. Comme ces deux modules sont des réels positifs, l'égalité équivaut à :

$$|z+1|^2 = |z-1|^2$$
$$(z+1)(\overline{z}+1) = (z-1)(\overline{z}-1)$$
$$z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$$
$$z + \overline{z} = -z - \overline{z}$$
$$z = -\overline{z}$$

Les nombres complexes qui vérifient cette équation sont les imaginaires purs.

2. Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

(a)
$$(E_1)\; z^4 + 16z^2 + 100 = 0$$

On commence par résoudre $Z^2 + 16Z + 100 = 0$, dont les solutions sont : $Z_1 = -8+6i$ et $Z_2 = -8-6i$.
Ainsi, les solutions de $(E_1)$ sont les deux racines carrées de $-8+6i$ ainsi que les deux racines carrées de $-8-6i$.
Commençons par déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que $(a+ib)^2 = -8+6i$, c'est à dire :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases}$$

A l'aide de $\left|(a+ib)^2\right| = |8+6i|$, i.e. $a^2+b^2 = 10$, et avec la première équation, on obtient $2a^2 = 2$ et $2b^2 = 18$ donc $a = \pm 1$ et $b = \pm 3$. D'après la deuxième équation du système, $a$ et $b$ sont de même signe donc les deux racines carrées de $Z_1$ sont $1+3i$ et $-1-3i$.
Puisque $Z_2$ est le conjugué de $Z_1$, il est clair que $1-3i$ et $-1+3i$, les conjuguées des racines de $Z_1$, sont les deux racines carrées de $Z_2$.
Les solutions de $E_1$ sont donc $-1-3i$, $-1+3i$, $1-3i$ et $1+3i$.

(b)

$$z^3 = 27e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

On peut remarquer qu'une solution de cette équation est $z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$, elle est donc équivalente à :

$$z^3 = \left(3e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$$

$$\left(\frac{z}{3e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = 1$$

Connaissant les 3 racines 3èmes de l'unité que sont 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, on en déduit que les trois solutions sont :

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = 3e^{i\frac{11\pi}{12}} \text{ ou } z = 3e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = 3e^{i\frac{11\pi}{12}} \text{ ou } z = 3e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

(c)

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$$

L'énoncé sous-entend que $z \neq i$, et si l'on pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$, $z$ est solution de l'équation si et seulement si :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation sont les racines quatrièmes de l'unité sauf 1, donc : $-1$, $i$ et $-i$. Ainsi $z$ est solution de l'équation de départ dans les cas suivants :

i. $\frac{z+i}{z-i} = -1$

$$z + i = -z + i$$

$$z = 0$$

ii. $\frac{z+i}{z-i} = -i$

$$z + i = -iz - 1$$

$$(1+i)z = -1 - i$$

$$z = -1$$

iii. $\frac{z+i}{z-i} = i$

$$z + i = iz + 1$$

$$(1-i)z = 1 - i$$

$$z = 1$$

L'équation a donc trois solutions : $-1$, 0 et 1.

**Exercice 4.** *Centre d'un cercle selon Napoléon*

On a un cercle tracé dans un plan, et l'on veut retrouver le centre de ce cercle. On se munit d'un repère du plan centré sur le centre $O$ du cercle, et l'unité de longueur de notre repère est choisie de telle façon que le cercle étudié est le cercle trigonométrique de ce repère.

1. Pointant sur le point d'affixe 1, on trace un cercle de rayon strictement plus grand que 1 et strictement plus petit que 2. On obtient ainsi deux points d'intersection avec le cercle de départ. Notons $z$ l'affixe de l'un des deux points d'intersection, l'autre est $\bar{z}$ puisque $|z-1| = |\bar{z}-1|$ ( ces deux complexes sont conjugués ) et que l'on a $|z| = |\bar{z}| = 1$.

2. Dans toute la suite de cet exercice, on appelera les points par leurs affixes pour ne pas alourdir les notations. La deuxième étape de la construction consiste à tracer le point $u$ tel que $1,z,u,\bar{z}$ forme un losange. Calculons $u$ en fonction de $z$ et $\bar{z}$ : Un losange est en particulier un parallélogramme donc le vecteur d'origine $z$ et d'extremité $u$ doit être égal à celui d'origine 1 et d'extremité $\bar{z}$ :

$$u - z = \bar{z} - 1$$

$$u = z + \bar{z} - 1$$

On remarque en particulier que $u = 2\mathrm{Re}(z) - 1 \in \mathbb{R}$.

3. On trace ensuite le cercle centré sur $u$ et de rayon $|u-1|$, ainsi que le cercle centré sur 1 et de rayon $|z-1|$. On note $v$ un des deux points d'intersection. Ecrivons les deux équations de cercle que doit vérifier $v$ en complexes :

$$\begin{cases} |v-u| = |u-1| \\ |v-1| = |z-1| \end{cases}$$

On peut mettre au carré les quatre membres de ces deux équations qui sont tous des nombres positifs, et l'on retrouve ainsi les équations de cercle :

$$\begin{cases} |v-u|^2 = |u-1|^2 \\ |v-1|^2 = |z-1|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v-u)(\bar{v}-u) = (u-1)^2 \\ (v-1)(\bar{v}-1) = (z-1)(\bar{z}-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\bar{v} - u(v+\bar{v}) + u^2 = u^2 - 2u + 1 \\ v\bar{v} - (v+\bar{v}) + 1 = z\bar{z} - 1(z+\bar{z}) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\bar{v} - u(v+\bar{v}) + 2u - 1 = 0 \\ v\bar{v} - (v+\bar{v}) + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

4. On construit enfin le point $w$ de sorte que $1,v,w,\bar{v}$ forme un losange. On a donc comme à la première question :

$$w - v = \bar{v} - 1$$

$$w = v + \bar{v} - 1$$

5. Montrons que $w = 0$, c'est à dire que le dernier point que l'on a construit est le centre du cercle de départ.

   Suivant l'indication, on utilise la question 2 pour remplacer $z + \bar{z}$ par une expression en fonction de $u$ dans les équations de la question 3 :

$$\begin{cases} v\bar{v} - u(v+\bar{v}) + 2u - 1 = 0 \\ v\bar{v} - (v+\bar{v}) + u = 0 \end{cases}$$

   En soustrayant la deuxième à la première, on obtient :

$$-u(v+\bar{v}) + 2u - 1 + (v+\bar{v}) - u = 0$$

$$(1-u)(v+\bar{v}) + u - 1 = 0$$

$$(1-u)(v+\bar{v}-1) = 0$$

   Puisque $u \neq 1$, on a bien $w = v + \bar{v} - 1 = 0$