Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Equations*

1. Equations et détermination des cosinus et sinus d'un angle.

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4t) = 0$.
   Les solutions sont les $t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$4t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$t \equiv \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{4}]$$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
   On considère le trinôme $T(X) = 8X^2 - 8X + 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 32$ et les deux racines sont $X_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $X_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
   L'équation à résoudre équivaut à $T(x^2) = 0$, donc les solutions sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$. On a quatre solutions qui forment l'ensemble :

$$\left\{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\ ;\ -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\ ;\ \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\ ;\ -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right\}.$$

$$\left\{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}.$$

   (c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
   On rappelle que $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ d'où l'on déduit :

$$\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1$$

$$\cos(4t) = 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1$$

$$\cos(4t) = 2(4\cos^4 t - 4\cos^2 t + 1) - 1$$

$$\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$$

   De ceci, on déduit pour $t = \frac{\pi}{8}$ et $t = \frac{3\pi}{8}$, que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ sont des solutions de l'équation de la question précédente. Puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on obtient par stricte décroissance de cos sur $[0, \pi]$:

$$1 > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0.$$

   Parmi les quatre solutions de l'équation de la question précédente, seules deux sont positives et l'on déduit finalement des inégalités précédentes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2. Equations trigonométriques.
   Résolvons les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

   Cette équation a donc deux types de solutions : $2x + \dfrac{\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $2x + \dfrac{\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$.
   Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ ou bien $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&5x \equiv \frac{2\pi}{3} - x\,[2\pi] && \text{ou } 5x \equiv -\frac{2\pi}{3} + x\,[2\pi]\\
&6x \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] && \text{ou } 4x \equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]\\
&x \equiv \frac{\pi}{9}\,[\frac{\pi}{3}] && \text{ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}\,[\frac{\pi}{2}]
\end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(2x) = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\\
\cos(2x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} - x\right)\\
\cos(2x) &= \cos(\pi - x)
\end{aligned}$$

   On a donc encore une fois deux types de solutions : $2x \equiv \pi - x\,[2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi\,[2\pi]$.
   Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv -\pi\,[2\pi]$. On remarque que les x qui vérifient la deuxième condition vérifient aussi la première donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 2. *Fonctions trigonométriques réciproques*

1. On note g la fonction définie par :

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x.$$

   Etudier rapidement la fonction g et en déduire une transformation géométrique qui lie la courbe de Arcsin et celle de Arccos.
   Puisque les fonctions Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1, 1[$, il en est de même de g et l'on a si $x \in]-1, 1[$:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ainsi, la dérivée de g est nulle sur $]-1,1[$ et g est continue en -1 et en 1. On en déduit que g est constante sur $[-1,1]$.
Comme $g(0)=\frac{\pi}{2}$, on a donc :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arccos } x = 2\frac{\pi}{4} - x$$

On en déduit que les courbes des deux fonctions Arccos et Arcsin sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=\frac{\pi}{4}$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, que f est dérivable sur $]-1,1[$, calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
On prouve d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque Arcsin est définie sur $[-1,1]$, on doit donc vérifier que pour tout x réel, on a :

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Puisque $x^2+1>0$, cette double inégalité équivaut à :

$$-x^2-1 \leq 2x \leq x^2+1$$

La première inégalité équivaut à $0 \leq 2x+x^2+1$ i.e. $0 \leq (x+1)^2$, et la deuxième à $0 \leq x^2+1-2x$ i.e. $0 \leq (x_1)^2$. Les deux inégalités que l'on souhaitait vérifier sont donc justes.
Comme Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, on remarque que les deux inégalités précédentes sont strictes si $x \notin \{-1,1\}$, donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, et en particulier sur $]-1,1[$. On calcule alors pour $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}\text{Arcsin'}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$
$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^4-2x^2}}$$
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{(1-x^2)^2}}$$
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

(b) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = 2\text{Arctan}x.$$

On note h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h : x \mapsto f(x) - 2\text{Arctan}(x)$.
h est dérivable, sa dérivée est nulle d'après le calcul précédent. Ainsi, h est une fonction constante. Puisque $h(0)=0$, on en déduit que h est la fonction nulle et le résultat attendu.

Problème

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ f(x+y)\geq f(x)+f(y)\ \text{(on dit que } f \text{ est sur-additive)}, \tag{4}$$
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ f(xy)=f(x)f(y)\ \text{(on dit que } f \text{ est multiplicative)}. \tag{5}$$

1. Soit α un réel supérieur ou égal à 1.
   (a) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $(1+x)^\alpha\geq 1+x^\alpha$.
   On note :
   $$h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$$
   $$h:x\mapsto(1+x)^\alpha-1-x^\alpha$$
   On remarque que h est dérivable et que l'on a :
   $$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ h'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha x^{\alpha-1}.$$
   Or $\alpha-1\geq 0$ donc la fonction $x\mapsto x^{\alpha-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $h'(x)\geq 0$.
   h est donc une fonction croissante, et l'on déduit du fait que $h(0)=0$ que h est à valeurs positives : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ (1+x)^\alpha-1-x^\alpha\geq 0$.
   (b) En déduire que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^\alpha\geq x^\alpha+y^\alpha$.
   Si x ou y vaut 0, cette inégalité est une égalité et est donc vérifiée.
   Si x et y sont différents de 0, on a alors d'après la question précédente appliquée au nombre $\frac{x}{y}$:
   $$\left(1+\frac{x}{y}\right)^\alpha\geq 1+\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$
   $$y^\alpha\left(1+\frac{x}{y}\right)^\alpha\geq y^\alpha\left(1+\frac{x^\alpha}{y^\alpha}\right)$$
   $$\left((y(1+\frac{x}{y})\right)^\alpha\geq y^\alpha+x^\alpha$$
   $$(y+x)^\alpha\geq y^\alpha+x^\alpha$$
   (c) On considère la fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^\alpha$.
   Justifier que f est solution du problème posé.
   D'après la question précédente, f est sur-additive. Or on sait que :
   $$\forall x,y\in\mathbb{R}_+,(xy)^\alpha=x^\alpha y^\alpha.$$
   On en déduit que f est multiplicative et est donc une solution du problème posé.
2. (a) Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?
   Une fonction constante en la valeur $C\in\mathbb{R}$ est solution si et seulement si $C\geq C+C$ et $C=C^2$.Ces deux conditions signifient respectivement que $C\leq 0$, et que $0=C(C-1)$. On en déduit que la seule solution constante est la fonction nulle.
   Dans toute la suite du problème, on considère une fonction f non constante qui est solution de celui-ci.
   (b) Montrer que l'on a alors $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
   On a $f(0\times 0)=f(0)f(0)$ et $f(0+0)\geq f(0)+f(0)$ d'où l'on déduit d'une part que $f(0)=0$ ou $f(0)=1$, et d'autre part que $f(0)\leq 0$. Ainsi, $f(0)=0$.
   Puisque f n'est pas constante, on a $x\in\mathbb{R}_+$ tel que $f(x)\neq 0$.
   Alors $f(1\times x)=f(1)f(x)$ d'où $f(x)(1-f(1))=0$ et donc $1-f(1)=0$ c'est à dire $f(1)=1$.

(c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x^n) = f(x)^n$.
On le prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 1$, $f(x^1) = f(x) = f(x)^1$ donc la propriété est vraie.
On suppose dorénavant que $f(x^n) = f(x)^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \times x) = f(x^n)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}.$$

La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a en effet :

$$f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(1)$$
$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

On en déduit que $f(x) \neq 0$ et que $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

(e) Prouver enfin que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) \geq 0$ donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$.

(f) Montrer que f est croissante.
Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Alors on a $y - x \geq 0$ et :

$$f(y) = f(x + (y - x)) \geq f(x) + f(y - x)$$

Or $f(y - x) \in \mathbb{R}_+$ donc $f(x) + f(y - x) \geq f(x)$ et l'on conclut : $f(y) \geq f(x)$.

3. On considère encore dans ces dernières questions une fonction f non constante qui est solution du problème.

(a) Justifier que $\ln(f(2))$ est bien défini et que $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$.
$\ln(f(2))$ est bien défini car $f(2) \in \mathbb{R}_+^*$ d'après la question 2(d).

$$f(2) = f(1 + 1) \geq f(1) + f(1) = 2$$

Donc on a $f(2) \geq 2$ d'où $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$ par croissance de ln.

(b) Justifier : $\forall x > 0, \exists! q \in \mathbb{Z},\ 2^q \leq x < 2^{q+1}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, cette double inégalité équivaut par stricte croissance de la fonction ln à :

$$q\ln(2) \leq \ln(x) < (q + 1)\ln(2)$$
$$q \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < q + 1$$

On sait en effet qu'il existe un unique $q \in \mathbb{Z}$ vérifiant ceci, il s'appelle la partie entière de $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

(c) Soit $x > 0$ un réel et p un entier naturel.
On convient de noter q_p l'unique entier relatif tel que $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$.

i. Déterminer la limite du rapport $\frac{q_p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.
On a en appliquant la fonction ln qui est croissante :

$$\ln(2^{q_p}) \leq \ln(x^p) \leq \ln(2^{q_p+1})$$

$$q_p\ln(2) \leq p\ln(x) \leq (q_p + 1)\ln(2)$$

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leq \frac{(q_p+1)}{p}$$

La deuxième inégalité nous donne $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p}$ et l'on a donc :

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On en déduit que $\frac{q_p}{p}$ tend vers $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

ii. En observant l'encadrement $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_p+1}$, justifier :

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p+1}{p}.$$

L'encadrement observé provient de la croissance de f et sa multiplicativité.
Il suffit de le passer à la fonction ln pour en déduire :

$$q_p \ln(f(2)) \leq p \ln(f(x)) \leq (q_p+1)\ln(f(2))$$

On en déduit la double inégalité voulue en divisant tout par $p\ln(f(2))$.

iii. Si $x \neq 1$, en déduire que $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.
On peut en effet conclure de la question précédente l'encadrement :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))}.$$

On en déduit que $\frac{q_p}{p}$ tend vers $\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))}$ lorsque p tend vers $+\infty$ d'où :$\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(\ln(f(2)))} = \dfrac{x}{\ln(2)}$
donc $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.

(d) On pose $\alpha = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \geq 1$. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^\alpha.$$

On a en effet si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$ d'où :

$$\ln(f(x)) = \ln(x^\alpha)$$

et donc $f(x) = x^\alpha$ en passant à l'exponentielle.
Pour $x = 0$, on a bien $f(0) = 0 = 0^\alpha$.