Devoir à la maison

Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; \mathrm{dt}.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Prouver que l'on a pour tout n :

   $$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

   Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^n t = \cos t \cos^{n-1} t$.
3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :

   $$(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et

   $$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\frac{\pi(n+1)}{2(n+2)} \leq (n+1) I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

   et en déduire la limite de $\sqrt{n} I_n$ quand $n \to +\infty$.
6. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   Prouver alors que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\forall u \in [-n, +\infty[, \; \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$

7. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \; \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

8. On note dorénavant pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \; \mathrm{dt}, \; K_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \; \mathrm{dt}, \; L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \; \mathrm{dt}.$$

   Grâce aux changements de variables $t = \sqrt{n} \sin u$ et $t = \sqrt{n} \tan u$ respectivement, exprimer J_n à l'aide des termes de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et prouver que $L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.
9. Déterminer la limite de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Equations différentielles

1. Décrire l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t)\sin t = 2\sin t$$

2. On s'intéresse dans cette question aux solutions réelles de l'équation :

$$(E) \;\; y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t + \cos t$$

   (a) Préciser l'équation homogène associée, et l'ensemble de ses solutions réelles.

   (b) Déterminer une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la première équation, et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la deuxième :

$$y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) = e^t \qquad (1)$$
$$y_2''(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = \cos t \qquad (2)$$

   En déduire une solution particulière y_p de (E)
   Indication : on pourra chercher sous la forme $y_1 : t \mapsto Cte^t$ et $y_2 : t \mapsto A\cos t + B\sin t$ où $A, B, C \in \mathbb{R}$.

   (c) Décrire l'ensemble des solutions de (E), et préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon le vecteur $\vec{k}$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé est décrit par trois fonctions x, y et z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x''(t) &= \alpha y'(t) \\ y''(t) &= -\alpha x'(t) \\ z''(t) &= 0 \end{cases},$$

   où $\alpha = \frac{qB}{m} \in \mathbb{R}$ dépend de la charge de la particule q, de l'intensité du champ B et de la masse m de la particule.

   (a) Notons $Z(t) = x(t) + iy(t)$, montrer que la fonction $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ainsi définie est solution de l'équation différentielle $Z''(t) + i\alpha Z'(t) = 0$.

   (b) Si Z_0 et Z_0' sont deux complexes, déterminer l'expression de la solution Z de l'équation précédente qui vérifie $Z(0) = Z_0$ et $Z'(0) = Z_0'$.

4. On cherche à déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation :

$$(E') \;\; y''(t) + y(-t) = t\cos t$$

   Soit y une telle solution de classe $\mathcal{C}^2$

   (a) Montrer qu'il existe un unique couple p et i de fonctions respectivement paires et impaires telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = p(t) + i(t)$.

   (b) Montrer que les fonctions p et i précédentes sont solution des équations différentielles :

$$\begin{cases} p''(t) + p(t) &= 0 \quad (1) \\ i''(t) - i(t) &= t\cos t \quad (2) \end{cases}$$

   (c) Décrire l'ensemble des solutions paires de (1), et l'ensemble des solutions impaires de (2).
   (pour (2), on admettra que $i_p(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ est une solution particulière)

   (d) Déterminer finalement l'ensemble des solutions de (E')