Corrigé du devoir à la maison

1. On s'intéresse dans cette première partie aux fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(R)\, \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(a) On suppose dans cette question que $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifie (R), et l'on note $a = f(1)$.

i. Prouver que $f(0) = 0$.
Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

ii. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Si $n \in \mathbb{N}$ montrer que $f(nr) = nf(r)$.
On le démontre par récurrence : pour $n = 0$, c'est vrai puisque $f(0) = 0$.
On suppose donc que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, et on en déduit :

$$f((n+1)r) = f(nr + r)$$
$$f((n+1)r) = f(nr) + f(r)$$
$$f((n+1)r) = nf(r) + f(r)$$
$$f((n+1)r) = (n+1)f(r).$$

iii. Si k est un entier relatif, montrer que $f(kr) = kf(r)$.
D'après la question précédente, on a si $k \in \mathbb{N}$: $f(kr) = kf(r)$.
Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on peut appliquer le résultat à $(-k) \in \mathbb{N}$: $f(-kr) = -kf(r)$.
Or on sait que :

$$f(-kr) + f(kr) = f(-kr + kr)$$
$$-kf(r) + f(kr) = f(0)$$
$$f(kr) = kf(r)$$

iv. Si r est un nombre rationnel, montrer que l'on a $f(r) = ar$.
Soit $r = \frac{p}{q}$ où $p \in Z$ et $q \in \mathbb{N}^*$ un nombre rationnel, on a donc :

$$f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$
$$f(p) = qf(r)$$
$$pf(1) = qf(r)$$
$$f(r) = \frac{p}{q}f(1)$$
$$f(r) = ar$$

(b) Montrer que les fonctions f qui vérifient (R) sont celles telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar.$$

On vient de voir que si f est une solution du problème, f est nécessairement une fonction linéaire, c'est à dire que l'on a $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.
Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction vérifie, si x et y sont des réels :

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Les fonctions solutions sont donc toutes celles de cette forme.

2. Dans cette deuxième partie de l'exercice, on s'intéresse aux fonctions $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(S)\, \forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ g(x + y) = g(x)g(y).$$

   (a) Quelles sont les fonctions constantes qui sont solution du problème ?
   Une fonction constante en la valeur $C \in \mathbb{R}$ est solution si et seulement si $C = C^2$, donc les fonctions constantes qui sont solution sont la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

   (b) On considère dans cette question une fonction $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, qui n'est pas la fonction nulle, et qui vérifie (S).

      i. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) \neq 0$.
      Par l'absurde, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $g(r) = 0$. On a alors, si $t \in \mathbb{Q}$, en appliquant l'équation fonctionnelle avec $x = t - r$ et $y = r$:

$$g(t - r + r) = g(t - r)g(r)$$

$$g(t) = g(t - r) \times 0$$

$$g(t) = 0.$$

      La fonction g est donc la fonction nulle, ce qui fournit la contradiction désirée.

      ii. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) > 0$.
      Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a donc $\frac{r}{2} \in \mathbb{Q}$ et $g(r) = g\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = g\left(\frac{r}{2}\right)^2 \geq 0$. D'après la question précédente, on a donc $g(r) > 0$ puisque $g(r) \neq 0$.

      iii. Montrer que la fonction f définie pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par $f(r) = \ln(g(r))$ vérifie (R).
      Soient x et y dans $\mathbb{Q}$, on a :

$$f(x + y) = \ln(g(x + y)) = \ln(g(x)g(y)) = \ln(g(x)) + \ln(g(y)) = f(x) + f(y).$$

      f vérifie donc (R).

      iv. Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = e^{ar}.$$

      D'après la question précédente et la première partie de l'exercice, on a si $r \in \mathbb{Q}$:

$$f(r) = ar$$

$$\ln(g(r)) = ar$$

$$g(r) = e^{ar}$$

      avec $a = f(1) = \ln(g(1))$.

   (c) Conclure.
   L'analyse du problème nous a montré qu'une solution du problème est nécessairement la fonction nulle ou une fonction du type $g(r) = e^{ar}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, ces fonctions sont bien solutions du problème donc toutes les solutions sont de cette forme.

Bonus : Olympiades de 1977 avec indications

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f(f(n))$. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.
Indications :

— Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall k \geq n, f(k) \geq n$.

— Vérifier que f est croissante (il s'agit en fait d'une suite).

— Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < n+1$ et conclure.

Suivant les indications, on commence par établir la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(n) : \ \forall k \geq n, f(k) \geq n$$

Pour $n = 1$, cette propriété est $\forall k \geq 1, f(k) \geq 1$. Ceci est évidemment vrai puisque f a ses images dans $\mathbb{N}^*$ d'après l'énoncé.
Supposons donc qu'elle est vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$, on souhaite alors démontrer :

$$P(n+1) : \ \forall k \geq n+1, f(k) \geq n+1$$

Soit donc $k \geq n+1$, on a $k-1 \geq n$ donc $f(k-1) \geq n$ d'après $P(n)$, et donc $f(f(k-1)) \geq n$ encore grâce à $P(n)$. Comme $f(k) > f(f(k-1))$, on en déduit $f(k) > n$, i.e. $f(k) \geq n+1$.
Notre hypothèse de récurrence est donc héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En particulier pour $k = n$, on obtient que $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant ceci à $f(n)$, on obtient alors $f(f(n)) \geq f(n)$ et donc $f(n+1) \geq f(n)$. Ceci suffit à prouver la croissance de la fonction f qui est une suite.
Enfin, on écrit le fait que f est croissante :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^{*2}, \ k \leq l \Longrightarrow f(k) \leq f(l).$$

On en déduit que la contraposée est vraie aussi :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^{*2}, \ f(k) > f(l) \Longrightarrow k > l.$$

Ainsi, puisque $f(n+1) > f(f(n))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \ n+1 > f(n)$. On a déjà vu grâce à la récurrence précédente que $f(n) \geq n$ donc on a tout simplement $f(n) = n$.

DM n°6 pour éviter de gâcher une page d'impression au verso

Exercice 1. *Exercice fonction bornée*

Soient a, b et c trois réels tels que l'on a :

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ \left|ax^2+bx+c\right| \leq 1$$

1. Montrer que a, b et c vérifient nécessairement : $|a| \leq 2$, $|b| \leq 1$ et $|c| \leq 1$.
2. Montrer alors que l'on a :
$$\forall x \in [-1,1]\,,\ |2ax+b| \leq 4$$
3. Montrer que 4 est la plus petite constante telle que le résultat de la deuxième question reste vrai.

On pourra utiliser au besoin l'inégalité triangulaire qui indique que pour tous x et y réels, on a :

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

Exercice 2. *Equation fonctionnelle*

On souhaite déterminer l'ensemble E de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ xf\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{2}{x}\right) = 1.$$

1. Soit $f \in E$, montrer alors que l'on a :
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{y}\right) = 2yf(y) - 1 \text{ et } f(y) = \frac{2}{y}f\left(\frac{1}{y}\right) - 1.$$
2. Conclure

Exercice 3. *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$.

   Démontrer par récurrence que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels.