Devoir à la maison

Exercice 1. *Exercice fonction bornée*

Soient a, b et c trois réels tels que l'on a :

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ \left|ax^2+bx+c\right| \leq 1$$

1. Montrer que a, b et c vérifient nécessairement : $|a| \leq 2$, $|b| \leq 1$ et $|c| \leq 1$.
2. Montrer alors que l'on a :
$$\forall x \in [-1,1]\,,\ |2ax+b| \leq 4$$
3. Montrer que 4 est la plus petite constante telle que le résultat de la deuxième question reste vrai.

On pourra utiliser au besoin l'inégalité triangulaire qui indique que pour tous x et y réels, on a :

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

Exercice 2. *Equation fonctionnelle*

On souhaite déterminer l'ensemble E de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ xf\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{2}{x}\right) = 1.$$

1. Soit $f \in E$, montrer alors que l'on a :
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{y}\right) = 2yf(y) - 1 \text{ et } f(y) = \frac{2}{y}f\left(\frac{1}{y}\right) - 1.$$
2. Conclure

Exercice 3. *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$.

   Démontrer par récurrence que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels.