Devoir surveillé

1 Application des composées d'homothéties à un problème de géométrie

On considère trois cercles disjoints dans le plan, de rayons tous différents. Lorsque l'on considère deux de ces cercles, il existe deux tangentes extérieures communes de sorte que nos deux cercles se trouvent entre ces deux tangentes. Ces deux tangentes se rencontrent en un point. Le but de cet exercice est de prouver que les trois points ainsi définis, en choisissant pour chacun deux des trois cercles, sont alignés.

1. Etant donnés deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres d'affixe c_1 et c_2, de rayons r_1 et r_2, montrer qu'il existe une seule homothétie de rapport positif qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. Déterminer en fonction de c_1, c_2, r_1 et r_2 l'affixe du centre de cette homothétie.

   Préciser le lien avec les tangentes extérieures évoquées au début de l'exercice.
2. Soient deux homothéties de centres ω_1 et ω_2 de rapports k_1 et k_2 tels que $k_1k_2 \neq 1$, montrer que la composée de ces deux homothéties est une homothétie dont le centre ω est aligné avec ω_1 et ω_2.
3. Conclure

2 Primitive de fonction trigonométrique

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ par :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^n u}{1+\cos u}\,\mathrm{du}.$$

1. (a) Pour $x \in]-\pi,\pi[$, calculer $f_0(x)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{u}{2}$. (revoir au besoin le cours sur les complexes pour l'expression de $\cos u$ à l'aide de $t = \tan\frac{u}{2}$).

   (b) Calculer ensuite $f_1(x)$ à l'aide de $f_0(x)$, puis $f_2(x)$ et $f_3(x)$.
2. (a) Étudier la fonction f_n sur $]-\pi,\pi[$: parité, dérivabilité, sens de variation.

   (b) Pour $x \geq \frac{2\pi}{3}$, prouver que l'on a :

   $$\frac{1}{2^n}(\tan(\frac{x}{2}) - \tan(\frac{\pi}{3})) \leq \int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{|\cos^n u|}{1+\cos u}\,\mathrm{du}.$$

   pour en déduire les limites de f_n en π, puis en $-\pi$.

   Donner l'allure de la courbe de f_n sur $]-\pi,\pi[$ en discutant selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $n \geq 2$ et $x \in]-\pi,\pi[$, trouver une relation entre $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ et $f_{n-2}(x)$.

   Indication : I.P.P. avec
   $$\frac{\cos^n u}{1+\cos u} = \cos u \frac{\cos^{n-1} u}{1+\cos u}.$$

3 Equations différentielles

Exercice 1. *Equation du premier ordre*

1. Etudier sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$x(1-x)y' + y = x$$

   NB : On fera l'étude une seule fois en notant I l'intervalle de résolution à choisir parmi les trois proposés. Ensuite, on pourra sur cet intervalle diviser l'équation par $x(1-x)$ pour se ramener à un type connu d'équation.
2. Déterminer les solutions de cette équation sur $]-\infty, 1[$.
3. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. *Equation différentielle originale*

On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$(F) \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 2f(-x) + x.$$

1. Soient α et β deux réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \alpha \cos x + \beta \sin x = 0.$$

   Prouver que $\alpha = \beta = 0$.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$(E) \;\; y'' + 4y = 2x + 1.$$

   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène associée à (E).
   (b) Déterminer une fonction affine qui est solution de (E).
   (c) Décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).
3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction qui vérifie la propriété (F).
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (b) Prouver que f est une solution de (E).
   (c) En déduire une expression de f.
4. Conclure : décrire l'ensemble Ω des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (F).