Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Fonction bornée*

Soient a, b et c trois réels tels que l'on a :

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ \left|ax^2+bx+c\right| \leq 1$$

1. Montrer que a, b et c vérifient nécessairement : $|a| \leq 2$, $|b| \leq 1$ et $|c| \leq 1$.
   En choisissant $x=0$, on obtient immédiatement $|c| \leq 1$.
   Pour $x=1$ et $x=-1$, on obtient $|a+b+c| \leq 1$ et $|a-b+c| \leq 1$.
   Ainsi, $|a+b+c-(a-b+c)| \leq |a+b+c|+|a-b+c| \leq 2$, i.e. $|2b| \leq 2$ et donc $|b| \leq 1$.
   On a aussi $|a+b+c+a-b+c) \leq |a+b+c|+|a-b+c| \leq 2$, i.e. $|2a+2c| \leq 2$, soit $|a+c| \leq 1$. Ainsi, $|a| = |a+c+(-c)| \leq |a+c|+|c| \leq 2$.
2. Montrer alors que l'on a :
   $$\forall x \in [-1,1]\,,\ |2ax+b| \leq 4$$
   Ici, il s'agit de remarquer qu'une fonction affine comme $x \mapsto 2ax+b$ est ainsi comprise entre -4 et 4 sur l'intervalle $[-1,1]$ si et seulement si ses valeurs en -1 et 1 le sont.
   Il s'agit donc de prouver $|2a+b| \leq 4$ et $|-2a+b| \leq 4$.
   On réutilise ($x=1$) $|a+b+c| \leq 1$: $|a+b+c+(-c)| \leq |a+b+c|+|c| \leq 2$ donc $|a+b| \leq 2$. D'où $|a+a+b| \leq |a|+|a+b| \leq 4$.
   De même, ($x=-1$) $|a-b+c| \leq 1$: $|a-b+c+(-c)| \leq |a-b+c|+|c| \leq 2$ donc $|a-b| \leq 2$. D'où $|a+a-b| \leq |a|+|a+b| \leq 4$.
3. Montrer que 4 est la plus petite constante telle que le résultat de la deuxième question reste vrai : pour $a=2$, $b=0$ et $c=-1$, l'inégalité ci-dessus est une égalité en -1 et 1.

Exercice 2. *Equation fonctionnelle*

On souhaite déterminer l'ensemble E de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ xf\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{2}{x}\right) = 1.$$

1. Soit $f \in E$, et $y \in \mathbb{R}^*$. Pour $x = 2y$, on obtient :
   $$2yf(y) - f\left(\frac{1}{y}\right) = 1.$$
   $$f\left(\frac{1}{y}\right) = 2yf(y) - 1.$$
   Et pour $x = \frac{2}{y}$, on a :
   $$\frac{2}{y}f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y) = 1.$$
   $$f(y) = \frac{2}{y}f\left(\frac{1}{y}\right) - 1.$$
   On a donc bien prouvé :
   $$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{y}\right) = 2yf(y) - 1 \text{ et } f(y) = \frac{2}{y}f\left(\frac{1}{y}\right) - 1.$$

2. En remplaçant le $f\left(\frac{1}{y}\right)$ de la deuxième égalité par l'expression obtenue dans la première, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f(y) = \frac{2}{y}(2yf(y) - 1) - 1.$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f(y) = 4f(y) - \frac{2}{y} - 1.$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ -3f(y) = -\frac{2}{y} - 1.$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f(y) = \frac{2}{3y} + \frac{1}{3}.$$

Il y a donc une unique fonction qui pourrait appartenir à E, mais on constate que $y \mapsto \frac{2}{3y} + \frac{1}{3}$ s'annule pour $y = -2$ et les fonctions de E ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^*$, donc $E = \emptyset$.

Exercice 3. *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n$.

Démontrer par récurrence que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.

On commence par calculer $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)u_1 = \frac{1}{2}$, et $u_3 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)u_2 = \frac{3}{8}$. Ainsi, on a bien $u_3 \leq \dfrac{2}{3}$.

Vérifions que la propriété est héréditaire. Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tel que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$, on a alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{n+1}{n^2}.$$

Vérifions alors que l'on a l'inégalité :

$$(I)\ \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2}{n+1}$$
$$(I) \Leftrightarrow\ \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{n^2(n+1)} \leq 0$$
$$(I) \Leftrightarrow\ -n^2 + 2n + 1 \leq 0$$

Le trinôme du second degré ci-dessus admet pour racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ donc l'inéquation est vérifiée pour tout $n \notin]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$ et donc en particulier si $n \geq 3$. Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit : $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{n+1}$, la propriété à démontrer est donc héréditaire et vraie pour tout entier $n \geq 3$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1 + \sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels.

Pour $n = 0$, on a $(1 + \sqrt{2})^0 = 1 + 0\sqrt{2}$ qui est de la forme voulue avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels. On en déduit :

$$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$
$$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

Donc $(1 + \sqrt{2})^{n+1}$ est de la forme attendue avec $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.