

## Devoir à la maison

On étudie dans ce devoir la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$$

### Etude de la convergence de la suite $x$

1. Quelle propriété simple vérifie la suite  $(x_n)$  vous permettant d'affirmer qu'elle a nécessairement une limite, finie ou infinie ?
2. Montrer que l'on a pour tout  $k \geq 2$  :

$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2}$$

3. Calculer la somme suivante pour  $n \geq 2$  :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} \right)$$

4. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

### Etude de fonctions

5. A l'aide d'études de fonctions, démontrer les inégalités suivantes pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$\sin x < x < \tan x$$

6. Montrer alors que l'on a pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

### Une formule trigonométrique

7. Par exemple à l'aide de la formule de duplication du sinus, démontrer la formule suivante valable pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi-x}{2}} \right)$$

## Etude de la limite de la suite $x$

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)}$$

8. Calculer  $u_0$ .
9. Montrer à l'aide de la formule trigonométrique démontrée précédemment que la suite  $(u_n)$  vérifie pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n = \frac{1}{4}u_{n+1}$ .  
Indication : On pourra couper la somme en deux à l'aide de la formule évoquée ci-dessus, puis faire le changement de variable  $j = 2^{n+1} - 1 - k$  dans la deuxième partie de la somme.
10. Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$
11. Montrer que l'on a l'inégalité suivante, valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n - 2^n \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2 \pi^2} \leq u_n$$

12. Dédurre des deux questions précédentes un encadrement de  $x_{2^n-1}$  si  $n \in \mathbb{N}$ .  
Montrer la convergence de la suite  $(x_{2^n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser sa limite.
13. Conclure concernant la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .