

---

## Programme des colles du 18/12 au 22/12

---

## 1. Logique et raisonnement

- Définition d'une proposition logique : énoncé qui est soit vrai, soit faux.
- Quantificateurs et prédicats.
- Connecteurs logiques : et, ou,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ .
- Négation d'assertions avec des quantificateurs, "et", "ou",  $\Rightarrow$ .
- Ensembles, inclusion et égalité d'ensembles.
- Raisonnement par contraposée : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair puis par l'absurde :  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
- Raisonnement par analyse-synthèse : toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit d'une seule manière comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Récurrences.
- Fonctions injectives, surjectives, bijectives.
- Une composée d'injections est injective, une composée de surjections est surjective.

2. Sommes et produits avec notations  $\Sigma$  et  $\Pi$ 

- Symbole  $\sum_{k=m}^n a_k$  où  $m$  et  $n$  sont deux entiers relatifs tels que  $m \leq n$ , convention que la somme est nulle sinon, nombre de termes d'une telle somme :  $n - m + 1$ .
- Linéarité de la somme.
- Sommes télescopiques.
- Sommes géométriques
- Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ .
- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  ;  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ;  $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .
- **Sommes doubles**  $\sum_{m \leq i, j \leq n} a_{i,j}$ ,  $\sum_{m \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$  **ou**  $\sum_{m \leq i < j \leq n} a_{i,j}$  **à savoir écrire comme deux sommes imbriquées et calculer sur des exemples.**
- Produits
- Changement d'indice dans une somme :  $j = \alpha + k$  ou  $j = \alpha - k$  ( $\alpha \in \mathbb{Z}$ ).
- Coefficients binomiaux, formules :

$$(i) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(ii) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$(iii) k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

NB : ces formules sont valables pour toutes valeurs entière relative de  $k$  et entière naturelle de  $n$  avec la convention que  $\binom{n}{k} = 0$  lorsque l'inégalité  $0 \leq k \leq n$  n'est pas respectée.

- Formule du binôme de Newton.

## 3. Suites

- Suites arithmétiques, géométriques
- Suites arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, polynôme caractéristique et calcul du terme général.
- **Limites finies de suites : connaître les deux définitions possibles et la preuve de l'unicité.**
- Limites  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- **Limite d'une somme de deux suites convergentes.**
- Limite du produit, de l'inverse et du quotient de suites convergentes.
- Opérations et limites avec des suites convergentes ou divergentes vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .
- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
- Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
- Théorème de la limite monotone.