Corrigé du devoir à la maison

On étudie dans ce devoir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Etude de la convergence de la suite x

1. La suite (x_n) est croissante car $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{(2n+3)^2} > 0$ donc elle est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ ou divergente vers $+\infty$.
2. Calculons :
$$\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{4k+2-(4(k-1)+2)}{(4(k-1)+2)(4k+2)}$$
$$\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{4}{(4k-2)(4k+2)}$$
$$\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
Si k est un entier et $k \geq 2$, on a l'inégalité suivante :
$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
Donc on peut en déduire :
$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2}$$
3. La somme suivante est une somme télescopique donc on a pour $n \geq 2$:
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} \right)$$
$$S_n = \frac{1}{4(2-1)+2} - \frac{1}{4n+2}$$
$$S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{4n+2}$$
4. D'après la question 2, on a pour $n \geq 2$:
$$x_n \leq 1 + \frac{1}{9} + S_n$$
$$x_n \leq 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$$
Ceci prouve que la suite (x_n) est majorée, donc qu'elle converge.

Etude de fonctions

5. Soient g et h les fonctions définies pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$g(x) = x - \sin x \;\; ; \;\; h(x) = \tan x - x$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, de dérivées :

$$g'(x) = 1 - \cos x \;\; ; \;\; h'(x) = \tan^2 x$$

Ainsi, les deux fonctions g et h sont strictement croissantes sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Comme g et h sont continues en 0 et que $h(0) = g(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) > 0$ et $h(x) > 0$ et donc que $\sin x < x < \tan x$.

6. Notre inégalité ci-dessus concerne trois nombres strictement positifs, et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on a :

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan^2 x} &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\
\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\
\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\
\frac{1}{\sin^2 x} - 1 &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

Une formule trigonométrique

On a pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right)$$

Or on sait que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ donc :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi - x}{2}}\right)$$

Etude de la limite de la suite x

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$.

7. Calculons $u_0 = \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi}{4}} = 2$.
8. D'après la formule démontrée dans la partie 1.3, la suite (u_n) vérifie pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\right)}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\right)} + \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi(2^{n+2}-(2k+1))}{2^{n+3}}\right)}\right)$$

Faisons le changement de variable $j = 2^{n+1} - 1 - k$ dans la deuxième somme : on voit que j varie entre $2^{n+1}-1$ et $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ et qu'il faut remplacer k par $2^{n+1} - 1 - j$.

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\right)} + \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi(2^{n+2}-(2(2^{n+1}-1-j)+1))}{2^{n+3}}\right)}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\right)} + \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi(2j+1)}{2^{n+3}}\right)}\right)$$

Donc on a bien $u_n = \dfrac{1}{4}u_{n+1}$.

9. $u_n = 2 \times 4^n$
10. Pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$, on a $\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc :

$$\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} - 1 < \frac{1}{\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

$$\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} - 1 < \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2\pi^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

En sommant cette inégalité pour k variant entre 0 et $2^n - 1$, on obtient :

$$u_n - 2^n \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2\pi^2} \leq u_n$$

11. On note ϕ l'extraction telle que $\phi(n) = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit l'encadrement suivant de $x_\phi(n)$ si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 2^n \leq \frac{4^{n+2}}{\pi^2} x_{\phi(n)} \leq u_n$$

$$2 \times 4^n - 2^n \leq \frac{4^{n+2}}{\pi^2} x_{\phi(n)} \leq 2 \times 4^n$$

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{2^n \pi^2}{2^{2n+4}} \leq x_{\phi(n)} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2^{n+4}} \leq x_{\phi(n)} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi, on conclut par encadrement que $x_{\phi(n)} \to \frac{\pi^2}{8}$.

12. On a vu au début de ce devoir que (x_n) est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$. D'après le cours, toute suite extraite de (x_n) a alors le même comportement que (x_n) dans chacune de ces deux hypothèses. Donc la suite (x_n) converge vers $\frac{\pi^2}{8}$ puisque c'est le cas d'une de ses suites extraites.

Exercice bonus avec corrigé : Approximation du nombre d'or.

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

   $$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   et ainsi de suite,

   $$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   avec n radicaux.
   Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

   $$1 \leq u_n \leq \phi.$$

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

   $$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

   $$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Corrigé

1. La fonction $h : x \mapsto x^2 - x - 1$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Puisque $h(0) = -1$, $h(1) = -1$ et $h(2) = 1$, elle ne s'annule qu'une seule fois dans $\mathbb{R}_+$, en un point de l'intervalle $]1, 2[$.
2. On a tout simplement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

   $$1 \leq u_n \leq \phi.$$

   On prouve ceci par récurrence. Pour $n = 1$, $u_1 = 1$ donc la propriété est vraie.
   Supposons maintenant que la propriété est vraie au rang n, c'est à dire que $1 \leq u_n \leq \phi$.
   On en déduit par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$:

   $$\sqrt{1+0} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\phi},$$

   $$1 \leq u_{n+1} \leq \phi.$$

   Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut prouver que $u_{n+1} \geq u_n$, i.e. $\sqrt{1+u_n} \geq u_n$. Puisque les deux nombres sont positifs, cela revient à prouver que :

$$1 + u_n \geq u_n^2,$$

$$0 \geq u_n^2 - u_n - 1,$$

$$0 \geq h(u_n).$$

Ceci est vrai car la croissance de h sur l'intervalle $[1, \phi]$ et le fait que $u_n \in [1, \phi]$ nous garantit que :

$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(\phi),$$

$$-1 \leq h(u_n) \leq 0.$$

5. (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ car c'est une suite croissante et majorée d'après les deux questions précédentes. Par passage des inégalités larges à la limite, on a $1 \leq l \leq \phi$.
Suivant l'indication, on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, or $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+l}$. Par unicité de la limite, on en déduit que $l = \sqrt{1+l}$. ϕ est le seul nombre positif qui vérifie ceci donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$.

6. On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right|,$$

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{u_n - \phi}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}.$$

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On prouve enfin ceci par récurrence. Pour $n = 1$, ceci découle du fait que $u_1 = 1$ et $\phi \in [1, 2]$.
Supposons maintenant que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente :

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.