Devoir surveillé

Exercice 1. *Une fonction périodique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a > 0$ un réel tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 1$ et qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2a)$ en fonction de $f(x)$.
2. Montrer que f est une fonction périodique.

Exercice 2. *Équations fonctionnelles*

Les deux parties de cet exercice sont liées, on pourra admettre les résultats de la première partie pour traiter la deuxième.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$(R) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

   On note $a = f(1)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que f est impaire.
   (b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   (c) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(kx) = kf(x)$.
   (d) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$. En particulier, $f(r) = ar$.
   (e) On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = at$.
   Conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (R).
2. Soit $g : \mathbb{R} \to]-1,1[$ une application continue telle que :

$$(S) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

   (a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
   Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1,1[$, et que ϕ vérifie (S).
   (b) En déduire une expression simple, si $(X,Y) \in]-1,1[^2$, de $\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$ en fonction de $\phi^{-1}(X)$ et $\phi^{-1}(Y)$.
   (c) On note $h = \phi^{-1} \circ g$, montrer que h vérifie la propriété (R) de la première partie de l'exercice.
   (d) Déterminer alors une expression simple de g, et conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (S).

Exercice 3. *Quand la somme des cubes est égale au carré de la somme.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que :

$$(R)\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

1. (a) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \sum\limits_{i=1}^{n}(n+1) - \sum\limits_{i=1}^{n} i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
2. Montrer que $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$.
3. On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1}^3 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2$.
4. On suppose désormais que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 0$. Montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n$$
5. Réciproquement, démontrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = n$ vérifie (R).

Exercice 4. *Étude d'une suite homographique à l'aide de suites récurrentes linéaires d'ordre* 2.

On étudie les suites définies par une valeur initiale $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

où a, b, c et d sont des complexes tels que $ad - bd \neq 0$.
On suppose que l'on a choisi la valeur u_0 de sorte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie.
Soient p_0 et q_0 deux nombres complexes tels que $u_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relation de récurrence suivante :

$$p_{n+1} = ap_n + bq_n$$
$$q_{n+1} = cp_n + dq_n$$

1. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
2. Montrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont la même relation de récurrence :
$$p_{n+2} = (a+d)p_{n+1} + (bc - ad)p_n$$
$$q_{n+2} = (a+d)q_{n+1} + (bc - ad)q_n$$
3. Appliquer les idées précédentes pour calculer en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et
$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}.$$

Exercice 5. *Injections, surjections, bijections*

1. On note $Id_E : E \to E$ l'application telle que $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective.
2. A quelle condition sur les sous-ensembles A et B d'un ensemble E donné l'application : $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie pour toute partie X de E par $\phi(X) = (A \cap X, B \cap X)$ est-elle injective ? surjective ?