

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. Quantificateurs

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est la fonction nulle : $\forall x \in I, f(x) = 0$.
2. f s'annule : $\exists x \in I, f(x) = 0$.
3. f est à valeurs positives : $\forall x \in I, f(x) \geq 0$.
4. f est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = c$.
5. f est strictement croissante sur I : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Exercice 2. Rationnels et irrationnels.

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$.
Soient x et y dans \mathbb{Q} , on a alors a et c dans \mathbb{Z} , b et d dans \mathbb{N}^* tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$.
On en déduit que $x + y = \frac{ad+bc}{bd}$ où $ad + bc \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$ donc $x + y \in \mathbb{Q}$.
De même, $xy = \frac{ac}{bd}$ où $ac \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$ donc $xy \in \mathbb{Q}$.
2. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Par l'absurde, supposons que $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et que $x + y \in \mathbb{Q}$.
On aurait alors $y = -x + (x + y)$ où $-x \in \mathbb{Q}$ (car -1 et x sont rationnels) et $(x + y) \in \mathbb{Q}$.
On en déduirait que $y \in \mathbb{Q}$, ce qui est la contradiction désirée.
3. Somme de deux irrationnels.

(a) Montrer que $\sqrt{10}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{10}$ est rationnel, on a alors deux entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$. On suppose en outre que p et q n'ont pas de diviseur commun, c'est à dire que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $p^2 = 10q^2$.

Avant d'aller plus loin, rappelons le résultat suivant que nous avons démontré en cours par contraposée : si $p \in \mathbb{N}$ vérifie que p^2 est pair, alors p est pair. Par contraposition, il s'agissait de montrer que si p est impair, alors son carré est impair. Ceci se fait en écrivant qu'un entier p impair peut se mettre sous la forme $p = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, et que son carré est alors de la forme $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et est donc impair.

Revenant à notre raisonnement par l'absurde, on observe que $p^2 = 2(5q^2)$ est pair, donc que p est pair et peut s'écrire $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. On obtient alors $4p'^2 = 10q^2$ donc $2p'^2 = 5q^2$, c'est à dire $2(p'^2 - 2q^2) = q^2$. On déduit de cette dernière égalité que q^2 est pair donc que q est pair. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que p et q sont sans diviseur commun, et termine la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{10}$.

(b) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est rationnel, c'est à dire qu'il existe a et b entiers tels que $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \frac{a}{b}$. En élevant cette égalité au carré, on obtient $2 + 5 + 2\sqrt{10} = \frac{a^2}{b^2}$ donc $\sqrt{10} = \frac{a^2 - 7b^2}{2b^2}$. Cette dernière écriture signifie que $\sqrt{10}$ est rationnel, fournissant la contradiction désirée.

(c) La proposition suivante est-elle vraie : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2, x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Cette proposition est fautive : en effet, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mais leur somme est $0 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3. Une inéquation fonctionnelle, Suède 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :

$$|f(y) - f(x)| \leq 7(x - y)^2.$$

On considère une fonction f qui est solution de notre problème.

On considère deux nombres x et y réels tels que $x < y$. On coupe l'intervalle $[x, y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_n = y$, de sorte que pour tout entier k entre 0 et n , $x_k = x + k \frac{y-x}{n}$.

1. Avec les hypothèses et notations précédentes, on note pour tout k entier entre 1 et n :

$$a_k = f(x_k) - f(x_{k-1}). \text{ Que vaut la somme } S = \sum_{k=1}^n a_k ?$$

Cette somme est télescopique donc on obtient : $S = f(x_n) - f(x_0) = f(y) - f(x)$.

2. A l'aide des questions précédentes, montrer que si x et y sont des réels tels que $x < y$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x - y)^2}{n}.$$

On rappelle que l'on a :

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k$$

On en déduit par inégalité triangulaire :

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Or si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$|a_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq 7(x_k - x_{k-1})^2 = 7 \left(\frac{y - x}{n} \right)^2$$

On en déduit :

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^n 7 \left(\frac{y - x}{n} \right)^2$$

$$|f(y) - f(x)| \leq n \frac{7(x - y)^2}{n^2}.$$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x - y)^2}{n}.$$

3. Avec les hypothèses de la question précédente, montrer que $|f(y) - f(x)| = 0$.

Comme $\frac{7(x-y)^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on déduit de la question précédente que : $|f(y) - f(x)| \leq 0$ donc $|f(y) - f(x)| = 0$.

4. On a montré dans la question précédente qu'une fonction qui est solution du problème est constante, puisque pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, on a $f(x) = f(y)$. Réciproquement, toute fonction constante est une solution.

Exercice 4. Calculs de sommes

1. Sommes doubles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (i + j)$$

$$S_1 = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n (i + j)$$

$$S_1 = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n j \right)$$

$$S_1 = \sum_{j=0}^n \left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)j \right)$$

$$S_1 = \sum_{j=0}^n \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \sum_{j=0}^n j$$

$$S_1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + (n+1) \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_1 = n(n+1)^2$$

$$S_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$$

$$S_2 = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (i + j)$$

$$S_2 = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^j i + \sum_{i=0}^j j \right)$$

$$S_2 = \sum_{j=0}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + (j+1)j \right)$$

$$S_2 = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^n (j^2 + j)$$

$$S_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$S_2 = \frac{1}{4}(n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1))$$

$$S_2 = \frac{1}{4}n(n+1)(2n+4)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$$

$$S_3 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (i+j)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} (i+j)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} i + \sum_{i=0}^{j-1} j \right)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{(j-1)j}{2} + j^2 \right)$$

$$S_3 = \sum_{j=0}^n \left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{1}{2}j \right)$$

$$S_3 = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{4}(n(n+1)(2n+1) - n(n+1))$$

$$S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)2n$$

$$S_3 = \frac{1}{2}n^2(n+1)$$

2. Sommes binomiales.

- (a) Pour a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du binôme de Newton permettant de développer $Z_n = (a+b)^n$:

$$Z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ecrire complètement, sans le signe Σ , la formule ainsi obtenue pour $n = 5$:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

- i. Selon la valeur de $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer :

$$S_k = \sum_{p=1}^n \omega^{-kp}.$$

$$S_k = \sum_{p=1}^n (\omega^{-k})^p.$$

On distingue deux cas :

— Si $\omega^{-k} = 1$, i.e. $e^{\frac{-2ik\pi}{n}} = 1$, ce qui équivaut à $\frac{-2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$ c'est à dire $k \equiv 0[n]$, alors on a :

$$S_k = \sum_{p=1}^n 1 = n,$$

et ceci se produit pour $k = 0$ et $k = n$ donc $S_0 = S_n = n$.

— Si $\omega^{-k} \neq 1$, donc pour k différent de 0 ou n :

$$S_k = (\omega^{-k}) + (\omega^{-k})^2 + (\omega^{-k})^3 + \dots + (\omega^{-k})^n.$$

$$S_k = (\omega^{-k}) \left(1 + (\omega^{-k}) + (\omega^{-k})^2 + \dots + (\omega^{-k})^{n-1} \right).$$

$$S_k = (\omega^{-k}) \frac{1 - (\omega^{-k})^n}{1 - (\omega^{-k})}$$

$$S_k = (\omega^{-k}) \frac{1 - e^{-2ik\pi}}{1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}}$$

$$S_k = 0.$$

ii. Montrer alors que l'on a si $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{p=1}^n (z + \omega^p)^n = n(z^n + 1).$$

Indication : on pourra écrire cette somme comme une double somme, puis permuter les sommes.

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (z + \omega^p)^n &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (\omega^p)^{n-k} \\ \sum_{p=1}^n (z + \omega^p)^n &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=1}^n \binom{n}{k} z^k \omega^{np} \omega^{-kp} \\ \sum_{p=1}^n (z + \omega^p)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \sum_{p=1}^n \omega^{np} \omega^{-kp} \end{aligned}$$

Or $\omega^{np} = e^{-2ik\pi} = 1$ donc on a :

$$\sum_{p=1}^n (z + \omega^p)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k S_k$$

D'après la question précédente, les seuls termes non nuls de la somme sont pour $k = 0$ et $k = n$ donc :

$$\sum_{p=1}^n (z + \omega^p)^n = \binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{n} S_n z^n = n + n z^n.$$

Exercice 5. *Divergence de la série harmonique*

On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Quelle propriété de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie assure que cette suite a une limite. De quel type de limite peut-il s'agir ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle admet une limite qui est un nombre $l \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$.

2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - u_n$.

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On remarque que pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, d'où l'on déduit :

$$v_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

$$v_n \geq (2n - (n+1) + 1) \frac{1}{2n}$$

Cette dernière inégalité une fois simplifiée, assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq \frac{1}{2}$.

3. Dédurre des deux questions précédentes que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite u ne tend pas vers $+\infty$, on a alors d'après la première question un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. On en déduit que $v_n = u_{2n} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l - l = 0$.

Ceci est contradictoire avec l'inégalité $v_n \geq \frac{1}{2}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.