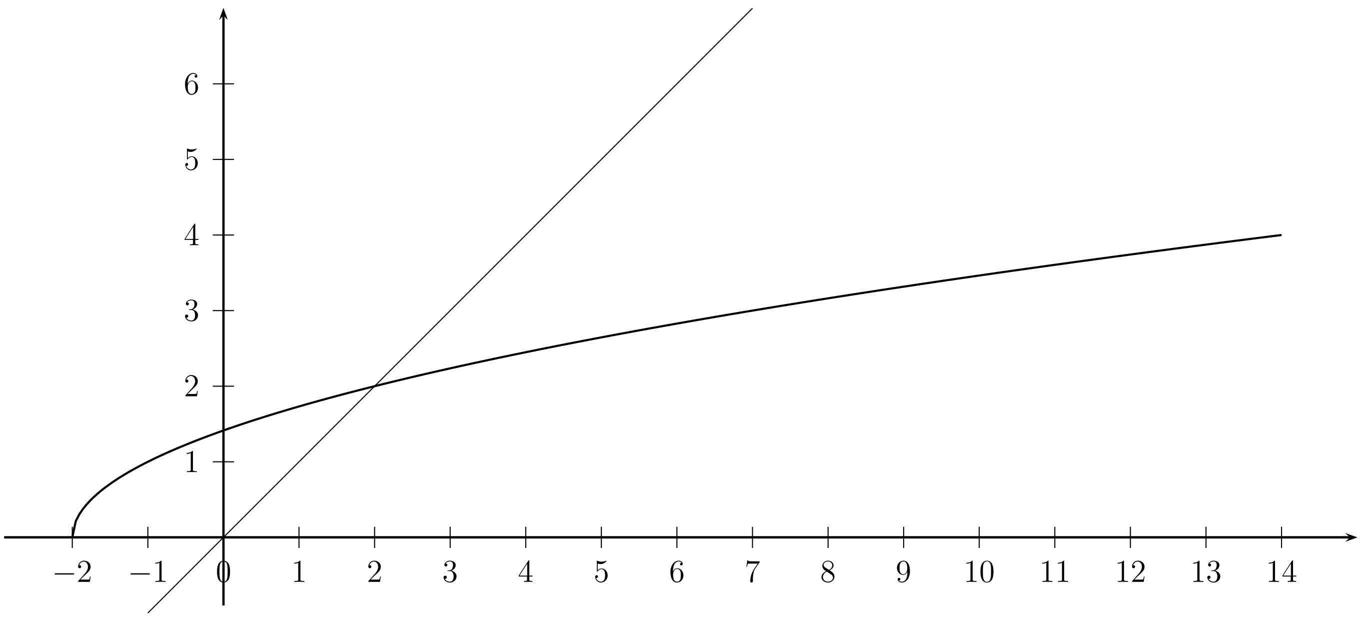
Devoir à la maison

1 Suites récurrentes

1. On note $f(x) = \sqrt{2+x}$ pour tout $x \in I = [-2, +\infty[$.
   (a) Prouver la stabilité de I par la fonction f.
   On considère dorénavant la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $s_0 \in I$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = f(s_n)$.
   (b) Représenter sur cet énoncé ci-dessous les différents cas à distinguer selon $s_0 \in I$ pour étudier les variations et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sans preuve mais en faisant apparaître chaque cas par la représentation des premiers termes d'une suite à l'aide du graphe).



   (c) Si $s_0 > 2$, décrire complètement le comportement de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prouvant toutes les assertions.
2. Soit $f\ :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.
   (a) Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quel est le sens de variation de f sur $[1, 3]$?
   (b) Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
   (c) Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite respective.
   (e) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2 Bonus de Noël : Irrationalité du nombre π par Erdös

1. Montrer la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour toute fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ où $(q_0, q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:
$$Q^{(k)}(0) = k! q_k$$
où $Q^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de Q.
2. Si Q est une fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$, on note :
$$J(Q) = \int_0^\pi Q(x) \sin x \, \mathrm{dx}$$
   (a) Si $Q(x) = q_1 x + q_0$ est de degré 1, montrer que $J(Q) = Q(0) + Q(\pi)$.
   (b) Si $Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$ est de degré 2, montrer que $J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - Q''(0) - Q''(\pi)$.
   (c) Prouver que pour toute fonction polynôme Q, on a :
$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \int_0^\pi Q''(x) \sin x \, \mathrm{dx}$$
   (d) Montrer par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la propriété :
   pour tout $n \leq 2N + 1$ et tout polynôme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ de degré inférieur ou égal à n, $J(Q) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \left(Q^{(2k)}(0) + Q^{(2k)}(\pi)\right)$.
3. Dans cette question et la suivante, on s'intéresse à la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = \dfrac{1}{n!} x^n (qx - p)^n$ où p, q sont deux entiers strictement positifs.
   (a) Calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton les coefficients $(a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n})$ tels que $P_n(x) = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
   (b) Montrer alors que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Comparer, pour $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ et $P_n(\frac{p}{q} - x)$.
   Montrer que l'on a pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$.
   (d) Déterminer le maximum de la fonction $f(x) = x(p - qx)$ pour $x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, et montrer alors que l'on a :
$$\max_{x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]} |P_n(x)| = \frac{1}{n!} \left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$
4. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que π est rationnel, donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. On définit alors la suite P_n comme à la question précédente, et l'on s'intéresse à la suite d'intégrales :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, \mathrm{dx}$$
On admet que le résultat de la question 3(d) permet de prouver que $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \in \mathbb{Z}^*$ puis conclure.