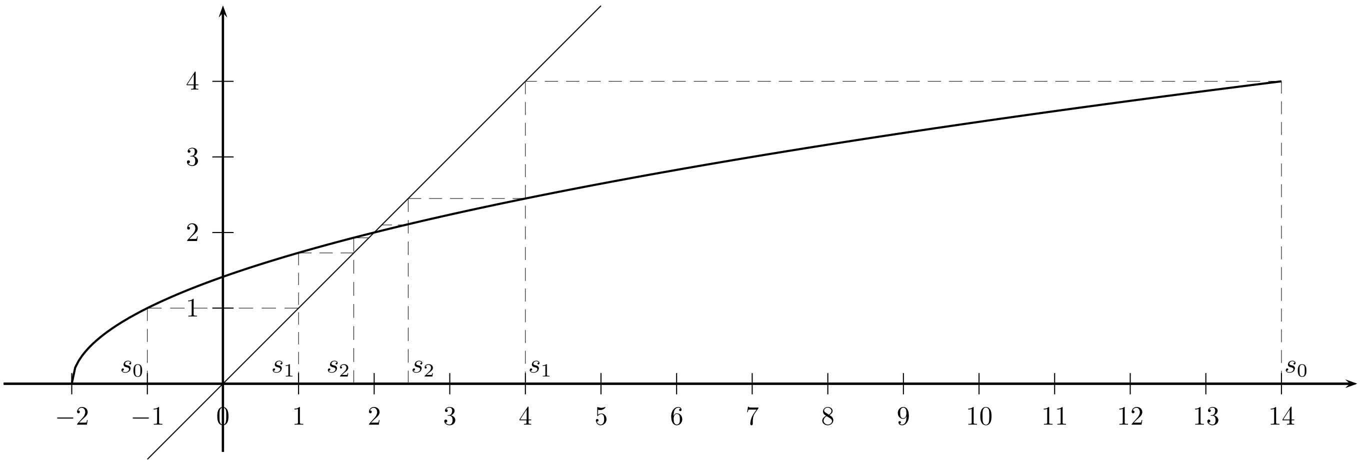
Corrigé du devoir à la maison

1 Suites récurrentes

1. On note $f(x) = \sqrt{2+x}$ pour tout $x \in I = [-2, +\infty[$.
   (a) Prouver la stabilité de I par la fonction f.
   f est croissante sur $[-2, +\infty[$ et l'on a $f(-2) = 0$ donc $\forall x \in [-2, +\infty[, f(x) \geq 0$ d'où $f(x) \in [-2, +\infty[$.
   On considère dorénavant la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $s_0 \in I$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = f(s_n)$.
   (b) Représenter la courbe de f et analyser les différents cas à distinguer selon $s_0 \in I$ pour étudier les variations et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sans preuve mais en faisant apparaître chaque cas par la représentation des premiers termes d'une suite à l'aide du graphe).



   (c) Si $s_0 > 2$, décrire complètement le comportement de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prouvant toutes les assertions.
   — Prouvons d'abord que $]2, +\infty[$ est stable par f. Si $x > 2$, on a $f(x) > f(2)$ par stricte croissance de f donc $f(x) > 2$ et l'intervalle est stable. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in]2, +\infty[$.
   — On calcule :
   $$F(x) = f(x) - x = \sqrt{2+x} - x = \frac{(\sqrt{2+x} - x)(\sqrt{2+x} + x)}{\sqrt{2+x} + x} = \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{2+x} + x}$$
   Les racines du trinôme au numérateur sont -1 et 2, donc il est de signe strictement négatif sur $]-2, +\infty[$ et il en est de même de F.
   Ainsi, $s_{n+1} - s_n = f(s_n) - s_n = F(s_n) < 0$ donc la suite (s_n) est décroissante.
   — (s_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers $l \in [2, +\infty[$. Comme f est continue, l est un point fixe de f c'est à dire que $F(l) = 0$. On a donc $l = 1$ ou $l = 2$ d'après la question précédente, donc $l = 2$.

2. Soit f :$]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.
   (a) Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f : f est décroissante sur $[1, 3]$, $f(1) = 3$ et $f(3) = \frac{5}{3} \geq 1$ donc $f([1, 3]) = [\frac{5}{3}, 3] \subset [1, 3]$.
   Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et à termes dans $[1, 3]$.
   (b) Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
   Comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante. Ainsi, la suite (v_n) qui vérifie à tout rang n : $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$, est monotone. On sait que $v_1 = f(f(1)) \in [\frac{5}{3}, 3]$ or $v_0 = 1$ donc $v_0 < v_1$ et la suite est donc croissante.

(c) Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Calculons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(u_{2n+2}) - f(u_{2n}) = f(v_{n+1}) - f(v_n)$$

Or $v_n \leq v_{n+1}$ donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$ par décroissance de f, ce qui signifie que (w_n) est décroissante.

(d) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite respective.
Les deux suites sont monotones et bornées donc convergentes. Comme $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ avec $f \circ f$ continue, elles convergent vers des points fixes de $f \circ f$. Résolvons donc, pour $x \in [1, 3]$:

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x$$

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x+2} - x = 0$$

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x + 2 + 2x - x(x+2)}{x+2} = 0$$

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 2}{x+2} = 0$$

Les deux solutions de cette équation étant -1 et 2, les deux suites convergent vers 2 car leurs termes sont supérieurs ou égaux à 1.

(e) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Comme les suites extraites d'indices pairs et impairs convergent vers 2, on a donc la suite (u_n) qui converge vers 2.

2 Bonus de Noël : Irrationalité du nombre π par Erdös

1. Montrons la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour toute fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ où $(q_0, q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$Q^{(k)}(0) = k! q_k.$$

Pour $n = 0$ et $Q(x) = q_0$, on a bien $Q^{(0)}(0) = Q(0) = q_0$.
Supposons la propriété vraie au rang n, soit alors

$$Q(x) = q_{n+1}x^{n+1} + q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0, \text{ où } (q_0, q_1, \cdots, q_n, q_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

On a pour $k = 0$: $Q(0) = q_0$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q' puisque

$$Q'(x) = (n+1)q_{n+1}x^n + nq_n x^{n-1} + (n-1)q_{n-1}x^{n-2} + \cdots + q_1$$

est de degré n. Si $j \in [\![0, n]\!]$, le coefficient de Q' devant x^j est $(j+1)q_{j+1}$ donc :

$$(Q')^{(j)}(0) = j!(j+1)q_{j+1}, \text{ i.e. } Q^{(j+1)}(0) = (j+1)! q_{j+1}.$$

On a donc bien pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ (en posant $k = j+1$), que $Q^{(k)}(0) = k! q_k$. Ceci prouve que l'hypothèse de récurrence est héréditaire, donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

2. Si Q est une fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$, on note :

$$J(Q) = \int_0^\pi Q(x) \sin x \,\mathrm{dx}$$

(a) Si $Q(x) = q_1 x + q_0$ est de degré 1, calculons :

$$J(Q) = \int_0^\pi (q_1 x + q_0) \sin x \,\mathrm{dx} = [-(q_1 x + q_0)\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -q_1 \cos x \,\mathrm{dx} = q_1\pi + q_0 + q_0 + [q_1 \sin x]_0^\pi .$$

Finalement, on a bien $J(Q) = Q(0) + Q(\pi)$.

(b) Si $Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$ est de degré 2, calculons

$$J(Q) = \int_0^\pi (q_2x^2 + q_1x + q_0)\sin x \,\mathrm{dx} = \left[-(q_2x^2 + q_1x + q_0)\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -(2q_2x + q_1)\cos x \,\mathrm{dx}$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) + [(2q_2x + q_1)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2q_2 \sin x \,\mathrm{dx} = Q(0) + Q(\pi) - 4q_2$$

On a donc finalement : $J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - Q''(0) - Q''(\pi)$.

(c) On calcule pour une fonction polynôme Q :

$$J(Q) = [Q(x)(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi Q'(x)(-\cos x)\mathrm{dx} = Q(0) + Q(\pi) + [Q'(x)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi Q''(x)\sin x \,\mathrm{dx}$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \int_0^\pi Q''(x)\sin x \,\mathrm{dx}$$

(d) Montrons par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la propriété :
pour tout $n \leq 2N+1$ et tout polynôme $Q(x) = q_nx^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1x + q_0$ de degré inférieur ou égal à n, $J(Q) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \left(Q^{(2k)}(0) + Q^{(2k)}(\pi)\right)$.
Pour $N = 0$, cette propriété a été démontrée au 2.(a).
Supposons la vraie au rang N, et soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $2(N+1)+1 = 2N+3$.
On a alors :

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \int_0^\pi Q''(x)\sin x \,\mathrm{dx}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q'' (car le degré de Q'' est $d(Q)-2$ donc $d(Q) \leq 2N+3$, d'où $d(Q'') \leq 2N+1$), d'où l'on déduit :

$$\int_0^\pi Q''(x)\sin x \,\mathrm{dx} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \left((Q'')^{(2k)}(0) + (Q'')^{(2k)}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \left(Q^{(2(k+1))}(0) + Q^{(2(k+1))}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) + \sum_{k=0}^{N}(-1)^{k+1} \left(Q^{(2(k+1))}(0) + Q^{(2(k+1))}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) + \sum_{i=1}^{N+1}(-1)^{i} \left(Q^{(2i)}(0) + Q^{(2i)}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = \sum_{i=0}^{N+1}(-1)^{i} \left(Q^{(2i)}(0) + Q^{(2i)}(\pi)\right)$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence est héréditaire donc vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$.

3. On s'intéresse à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(qx-p)^n$ où p, q sont deux entiers strictement positifs.

(a) Calculons à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qx)^k (-p)^{n-k}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} q^k (-p)^{n-k} x^{n+k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}(-p)^n x^n + \frac{1}{n!}\binom{n}{1} q(-p)^{n-1} x^{n+1} + \cdots + \frac{1}{n!}\binom{n}{n} q^n x^{2n}$$

Ainsi, les coefficients $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ sont nuls, et les coefficients a_{n+k}, pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont :

$$a_{n+k} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k} q^k (-p)^{n-k}.$$

(b) D'après la première question, on sait que $P_n^{(k)}(0) = k! a_k$ donc $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$, et l'on a pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(n+k)}(0) = (n+k)! a_{n+k} = \dfrac{(n+k)!}{n!}\binom{n}{k} q^k (-p)^{n-k}$.

Ainsi, $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(c) Calculons, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q} - x\right)^n \left(q(\frac{p}{q} - x) - p\right)^n = \frac{1}{n!}\frac{(p-qx)^n}{q^n}(-qx)^n = \frac{1}{n!}(-1)^n (p-qx)^n x^n$$

On a donc tout simplement : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = \dfrac{1}{n!}(qx-p)^n x^n = P_n(x)$.

En dérivant k fois cette relation par rapport à x, on a $(-1)^k P_n^{(k)}(\frac{p}{q} - x) = P_n^{(k)}(x)$.

On a donc pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$ avec $x = 0$, $P_n^{(k)}(\frac{p}{q}) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(d) La fonction $f(x) = x(p - qx)$ est une fonction du second degré qui s'annule en 0 et $\frac{p}{q}$, son maximum est atteint en $x = \frac{p}{2q}$ et il vaut $\frac{p^2}{4q}$. On remarque que pour $x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, $f(x) \geq 0$ et $|P_n(x)| = \frac{1}{n!} f^n(x)$ donc :

$$\max_{x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]} |P_n(x)| = \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$

4. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que π est rationnel, donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. On définit alors la suite P_n comme à la question précédente, et l'on s'intéresse à la suite d'intégrales :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \,\mathrm{dx}$$

On admet que le résultat de la question 3(d) permet de prouver que $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme le degré de P_n est $2n$, on peut appliquer le résultat 2.(d) avec $N = n$ et l'on a :

$$J(P_n) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right)\right)$$

D'après les résultats 3.(b) et 3.(c), on a donc $I_n = J(P_n) \in \mathbb{Z}$ puisque tous les termes de la somme ci-dessus sont des entiers relatifs. En outre, P_n et sin sont de signe strictement positif sur l'intervalle $\left]0, \frac{p}{q}\right[$ donc $I_n > 0$ ce qui entraîne automatiquement $I_n \geq 1$. On obtient une contradiction avec $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notre raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que π n'est donc pas rationnel.