

---

## Dérivation

---

### 1 Exercices sur la dérivabilité

#### Exercice 1.

Calculer la dérivée, quand elle est définie, de :

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \left( \frac{x+1}{x-1} \ln(x^2+3) \right).$$

(On ne cherchera pas à simplifier l'écriture de cette dérivée...)

#### Exercice 2.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'$  n'est pas continue en 0.

#### Exercice 3.

On considère une fonction  $f$  dérivable sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . On définit  $g$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1/2], & g(x) = f(2x), \\ \forall x \in ]1/2, 1], & g(x) = f(2x-1). \end{cases}$$

1. Montrer que  $g$  est continue sur  $[0, 1]$ .
2. A quelle condition  $g$  est-elle dérivable sur  $[0, 1]$  ?

#### Exercice 4.

Si  $f$  est une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , montrer :

1. si  $f$  est paire,  $f'$  est impaire,
2. si  $f$  est impaire,  $f'$  est paire,
3. si  $f$  est  $T$ -périodique,  $f'$  est  $T$ -périodique.

Etudier les réciproques.

#### Exercice 5.

Calculer, à l'aide de la dérivation, les sommes suivantes, où  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n(x, y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

#### Exercice 6.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable en  $x_0$ , point intérieur à  $I$ .

Déterminer la limite de  $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

**Exercice 7.**

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$ . Déterminer la limite éventuelle, quand  $x \rightarrow x_0$ , de :

$$\frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}.$$

**Exercice 8.**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dérivable vérifiant  $f \circ f = f$ .

1. Soit  $[m, M] = f([0, 1])$ . Vérifier que  $\forall x \in [m, M], f(x) = x$ .
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que si  $f$  n'est pas constante,  $M = 1$  et  $m = 0$ .
3. Conclure : trouver toutes les  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dérivables telles que  $f \circ f = f$ .

**Exercice 9.**

Déterminer les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = \frac{1}{2}x + 3.$$

Indication : on pourra calculer de deux façons différentes  $f \circ f \circ f(x)$ .

## 2 Théorème de Rolle et accroissements finis

**Exercice 10.**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p, q \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'équation  $x^n + px + q = 0$  admet au plus trois solutions.

**Exercice 11.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application 2 fois dérivable vérifiant  $f(a) = f(b) = 0$ . Soit  $c \in ]a, b[$ .

Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\alpha)$

(Utiliser l'application  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - A \frac{(x-a)(x-b)}{2}$ ,  $A$  étant choisi de sorte que  $g(c) = 0$ ).

**Exercice 12.**

Soit  $f$  une fonction dérivable du segment  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ) dans  $\mathbb{R}$ . On suppose :

- $\forall x \in [a, b], f'(x) \leq M$ ,
- $f(b) - f(a) = M(b - a)$ .

Montrer que  $f$  est affine (on pourra étudier  $g(x) = f(x) - M(x - a)$ ).

**Exercice 13. Théorème de Darboux**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

1. On suppose que  $f'(a) < 0$  et  $f'(b) > 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .
2. Montrer que  $f'$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, i.e pour tout intervalle  $I \subset [a, b]$ ,  $f'(I)$  est un intervalle.

**Exercice 14.**

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable à dérivée bornée. On suppose que  $f(n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 15.**

Etudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto x^x$$

### Exercice 16.

Soient  $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1], \mathbb{R})$  et :

$$g : x \in [-1, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-1, 1]$ .

### Exercice 17. Généralisation du théorème de Rolle

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, dérivable sur  $]a, +\infty[$  et telle que  $f(x) \rightarrow f(a)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

(On pourra utiliser  $g : [\arctan(a), \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(\tan(t))$ , mais ce n'est pas indispensable).

## 3 Dérivées $n$ -ièmes

### Exercice 18. Zéros de la dérivée $n$ -ième

Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $n \geq 1$ . On suppose que  $f$  s'annule en au moins  $p$  points distincts de  $\mathbb{R}$  avec  $p \geq n + 1$ . Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule en au moins  $p - n$  points distincts de  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 19. Leibniz

Calculer les dérivées  $n$ -ième de  $f : x \mapsto x^2 \sin x$  et  $g : x \mapsto e^x \cos x$ .

### Exercice 20. Dérivées $n$ -ièmes par récurrence

Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x} \quad \text{et} \quad \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} e^{1/x}) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

### Exercice 21. Application $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes ses dérivées nulles

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  si  $x > 0$ ,  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

1. Prouver l'existence d'une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de polynômes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, +\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer qu'il existe une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $g(x) = 0$  si  $|x| \geq 2$  et  $g(x) = 1$  si  $|x| \leq 1$ .

### Exercice 22.

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f(0) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - xf'(0)| \leq Mx^2.$$

2. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Montrer que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

3. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Etudier  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .

**Exercice 23. Inégalité de Landau**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

1. Montrer, si  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ , que :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{t} M_0 + \frac{t}{2} M_2.$$

2. En déduire que  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
3. On pose :

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|.$$

Montrer que :  $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ .

**4 Points fixes attractifs de suites récurrentes****Exercice 24.**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, 4]$  par  $f(x) = \sqrt{4+x}$ .

1. Montrer que l'intervalle  $[0, 4]$  est stable par  $f$ , et que  $f$  admet un unique point fixe  $\alpha$  sur  $[0, 4]$  que l'on calculera.
2. La suite  $(u_n)$  est définie par

$$u_0 \in [0, 4] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

Qu'en déduit-on sur le comportement de  $(u_n)$  ?

**Exercice 25. Valeur approchée de  $\ln 2$** 

Soient  $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$g(x) = (x-2)e^{2x} + (x+2)e^x, \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Démontrer que  $g \geq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Démontrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Que vaut  $f'(0)$  ?
3. Vérifier que  $f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^3}$ . En déduire que  $|f'(x)| \leq 1/2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . Prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

**Exercice 26.**

On considère la suite récurrente définie par  $u_0 \in \mathbb{R}^*$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x}$ .

1. Déterminer  $I = f(\mathbb{R}^*)$ , et montrer que  $I$  est stable par  $f$ .
2. Étudier la suite  $(u_n)$ .