Exercices sur les systèmes linéaires et matrices.

1 Système linéaire

Exercice 1. *Systèmes simples*

1. $$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y + z = 2 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 0 \\ 10x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x - 2y + z + t = -2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ 3x - 3y = -8 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ y - z - 2t = 1 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x + 3y + 2z + t = -2 \\ 2x + 7y + 3z = -5 \\ 3x + 8y + 7z + 11t = 13 \\ -2x - 8y - 2z + 6t = 18 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z + 11t = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. *Systèmes simples*

1. $$\begin{cases} x + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x + 2z = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 4y + 7z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x - 3y + 4z - 2t = 5 \\ 2y + 5z + t = 2 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + 3y = 1 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. *Systèmes à paramètres*

1.

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m+1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = a \\ 2x + my + 2z = b \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = c \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = a \\ x + t = b \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} ax + bz = 0 \\ bx + ay = 0 \\ by + az = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} ax + bt = 0 \\ bx + ay = 0 \\ by + az = 0 \\ bz + at = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. *Système apparemment non linéaire*
Résoudre le système suivant, où x, y et z sont des réels positifs :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3. \end{cases}$$

Indication : une fonction qui transforme les produits en sommes linéarise le système.

2 Matrices

Exercice 5. *Equation matricielle*
On cherche à déterminer les matrices X de $\mathcal{M}_{\in}(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$(*) \qquad X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'une telle matrice X commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire des relations entre les coefficients de X.
2. Déterminer les X solutions.

Exercice 6. *Puissances d'une matrice par conjecture*
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3 et A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. *Puissances d'une matrice et binôme de Newton*

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Calculer $(A+B)^2$ ainsi que $A^2 + 2AB + B^2$. Que remarquez-vous ?

2. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifier que $CD = DC$ et calculer en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$: C^p et D^p.
3. On note $E = C + D$, calculer E^p en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. *Transposition de matrices*

1. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $t_A A$, montrer que A est inversible et donner son inverse.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme $m_{i,j}$ à la ligne i et colonne j.
   Si $(i, j) \in \{1, 2, \cdots, n\}^2$, calculer le terme de $t_M M$ à la ligne i et colonne j ainsi que celui ligne j colonne i. Que remarquez vous ?

Exercice 9. *Inverse d'une matrice par la méthode naïve*
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le système que doivent vérifier a, b, c et d.
2. Montrer que le système précédent admet une unique solution que l'on précisera.
3. Vérifier que la matrice B ainsi obtenue vérifie également $BA = I_2$.

Exercice 10. *Inversibilité par résolution de système*

1. On considère le système suivant d'inconnues x, y et z dans $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & a \\ 2x + y + 3z & = & b \\ x - y + 2z & = & c \end{array} \right.$$

   Résoudre ce système en fonction des paramètres a, b et c réels.
2. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. *Inversion pratique*
Déterminer les inverses éventuels de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. *Inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*
On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$.
Montrer que a est inversible, et exprimer son inverse en fonction de a, b, c et d.

Exercice 13. *Calcul des puissances positives et négatives d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Calculer A^{-p} pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. *Produit nul*
Soient A, B, C trois matrices carrées non nulles telles que $ABC = 0$. Montrer que deux au moins de ces trois matrices ne sont pas inversibles.

Exercice 15. *Commutant*
Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 16. *Produits égaux*
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC. La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle)

Exercice 17. *Inverse à l'aide d'un polynôme annulateur*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$, que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. Prouver que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$,montrer l'inversibilité de A et calculer A^{-1}.

Exercice 18. *Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ et :

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
   Indication. On écrira A comme combinaison linéaire de la matrice identité et d'une matrice J ne contenant que des 1.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible. Exprimer alors son inverse.