Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Diverses propriétés des fonctions continues*

Dans tout cet exercice, on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Parmi les différentes affirmations ci-dessous, prouver celles qui sont vraies ou donner un contre-exemple lorsqu'elles sont fausses.
   (a) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
   Cette proposition est vraie : considérons le nombre $f(0)$, on a $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq m \Rightarrow f(x) \leq f(0)$ puisque la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$, et $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq M \Rightarrow f(x) \leq f(0)$ puisque la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$.
   Sur l'intervalle $[m, M]$, la fonction f est continue, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Elle admet en particulier un maximum $f(x_0)$ atteint en $x_0 \in [m, M]$. Ce maximum est un maximum sur $\mathbb{R}$ puisque si $x \notin [m, M]$, on a $f(x) \leq f(0) \leq f(x_0)$.
   (b) Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f n'est pas bornée : cette proposition est fausse comme le montre la fonction Arctan qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) Si f est périodique, alors f admet un maximum sur $\mathbb{R}$: cette proposition est vraie car, si l'on note $T > 0$ une période de la fonction, il suffit de considérer la fonction f sur l'intervalle $[0, T]$ où elle est continue. f admet donc sur cet intervalle un maximum, qui est alors un maximum sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
2. Si f est décroissante, montrer que f admet un unique point fixe, c'est à dire qu'il existe un seul $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$. On pose $F(x) = f(x) - x$. Puisque f est continue et décroissante, F est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Si $x > 0$, on a $F(x) = f(x) - x \leq f(0) - x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$, et si $x < 0$, on a $F(x) = f(x) - x \geq f(0) - x$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$. On en déduit que $F(x)$ admet des valeurs positives lorsque x est au voisinage de $-\infty$, négatives lorsque x est au voisinage de $+\infty$ donc que g qui est continue s'annule sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité du point fixe de f ainsi obtenu résulte de la stricte décroissance de F, qui ne peut s'annuler qu'une seule fois.
3. Si il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(x_0) = x_0$, montrer que f possède un point fixe. On distingue trois cas :
   — $x_0 < f(x_0)$: on étudie la fonction $F : x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle $[x_0, f(x_0)]$. On remarque en particulier que $F(x_0) > 0$ et que $F(f(x_0)) < 0$ donc F qui est continue s'annule en un point $x_1 \in]x_0, f(x_0)[$ qui est un point fixe de f.
   — $x_0 = f(x_0)$: x_0 est alors un point fixe de f.
   — $x_0 > f(x_0)$: on étudie la fonction $F : x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle $[f(x_0), x_0]$. On remarque en particulier que $F(f(x_0)) > 0$ et que $F(x_0) < 0$ donc F qui est continue s'annule en un point $x_2 \in]f(x_0), x_0[$ qui est un point fixe de f.

Exercice 2. *Suites définies par récurrence*

On considère dans cet exercice les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

On notera $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction telle que :

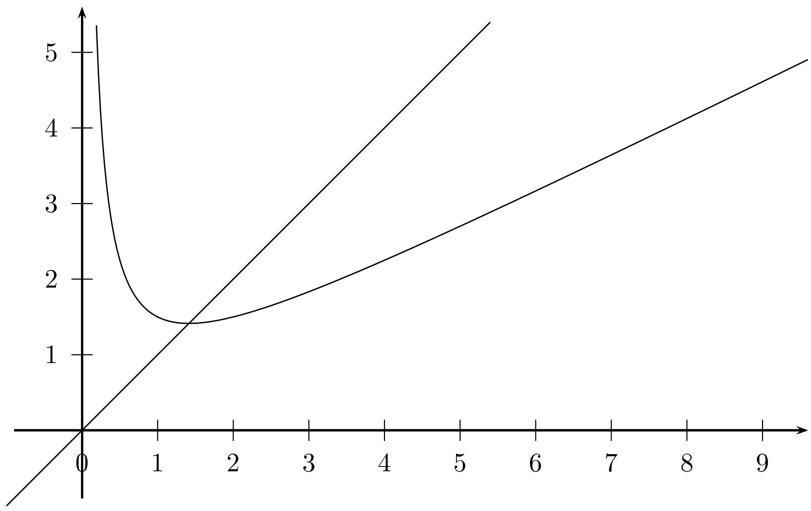
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\, g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

1. Justifier que les suites du type décrit précédemment sont bien définies.
   Par la fonction g, on constate que $\mathbb{R}^*$ est stable. En effet, si $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'alternative $x < 0$ et alors $g(x) < 0$ ou $x > 0$ et alors $g(x) > 0$ donc dans les deux cas, on a bien $g(x) \in \mathbb{R}^*$.
   Puisque $\mathbb{R}^*$ est stable par g, les suites récurrentes de cet exercice sont bien définies.

2. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a si $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}.$$

   Ainsi, sur $\left]0, \sqrt{2}\right]$, g est décroissante tandis que g est croissante sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$.



3. Etudier le signe de $g(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On calcule :

$$g(x) - x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2 - x^2}{2x},$$

   et l'on en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x) - x$	$\|$	$+$	0	$-$	

4. Si $u_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$, prouver que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
   On commence par remarquer que $[\sqrt{2}, +\infty[$ est un intervalle stable par la fonction g : soit $x \in [\sqrt{2}, +\infty[$, on a par croissance de g sur cet intervalle $g(\sqrt{2}) \leq g(x)$ i.e. $\sqrt{2} \leq g(x)$ donc $g(x) \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Puisque l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable, la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$ si $u_0 \geq \sqrt{2}$.
   On déduit alors du tableau de signe précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leq 0$, c'est à dire $g(u_n) - u_n \leq 0$ i.e. $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est donc décroissante.
5. Si $u_0 \geq \sqrt{2}$, prouver que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
   D'après la question précédente, d'après le théorème de la limite monotone, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Comme g est continue, on a $g(l) = l$, c'est à dire $g(l) - l = 0$ ce qui n'est possible que pour $l = \sqrt{2}$.
6. Que pouvez-vous dire si $u_0 \in]0, \sqrt{2}[$?
   On remarque grâce aux variations de f que si $u_0 \in]0, \sqrt{2}[$, alors $u_1 = g(u_0) \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Ainsi, la suite (u_n) est à termes dans $[\sqrt{2}, +\infty[$ et décroissante à partir du rang 1. On a donc encore $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
7. Que pouvez-vous dire si $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$? On a un comportement symétrique au cas où $u_0 > 0$ dans la mesure où f est impaire : si $u_0 \in] - \infty, -\sqrt{2}]$, la suite est croissante et converge vers $-\sqrt{2}$; si $u_0 \in] - \sqrt{2}, 0[$, alors $u_1 \in] - \infty, -\sqrt{2}]$ et l'on a encore $u_n \underset{n\to+\infty}{-} \sqrt{2}$.