

Devoir à la maison

1 Carrés magiques d'ordre 3.

Un carré est magique lorsque la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est identique. Cette somme est appelée **densité** du carré magique. L'ordre du carré correspond au nombre d'éléments d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Un carré d'ordre 3 contient huit rangées de trois éléments (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales). Le **médian** est l'élément du centre. Voici quelques exemples de tels carrés :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10	2	9
6	7	8
5	12	4

23	2	17
8	14	20
11	26	5

1. On considère les carrés de nombres suivant où x , y et z sont des nombres réels :

a)	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$2z$</td><td>$x+1$</td><td>$3y+7$</td></tr><tr><td>$5x-1$</td><td>$4y+1$</td><td>$z+7$</td></tr><tr><td>$3y+1$</td><td>$2z+3$</td><td>$2x+2$</td></tr></table>	$2z$	$x+1$	$3y+7$	$5x-1$	$4y+1$	$z+7$	$3y+1$	$2z+3$	$2x+2$
$2z$	$x+1$	$3y+7$								
$5x-1$	$4y+1$	$z+7$								
$3y+1$	$2z+3$	$2x+2$								

b)	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$x+1$</td><td>y</td><td>z</td></tr><tr><td>$2x$</td><td>$2y$</td><td>$2z$</td></tr><tr><td>$3x$</td><td>$3y$</td><td>$3z$</td></tr></table>	$x+1$	y	z	$2x$	$2y$	$2z$	$3x$	$3y$	$3z$
$x+1$	y	z								
$2x$	$2y$	$2z$								
$3x$	$3y$	$3z$								

Déterminer, pour chacun de ces deux carrés, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que le carré soit magique.

2. On souhaite maintenant décrire l'ensemble de tous les carrés magiques d'ordre 3, on considère donc le carré suivant où a , b , c , d , e , f , g et h et i sont des inconnues réelles :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

- (a) Écrire un système d'équations vérifiées par les inconnues si et seulement si le carré est magique.
- (b) Ecrire la matrice du système précédent, puis sa forme échelonnée réduite.
- (c) Préciser le rang du système, le nombre d'inconnues paramètres puis l'ensemble de ses solutions.
- (d) Prouver enfin que dans un carré magique d'ordre 3, la densité est le triple du médian.

2 Puissances d'une matrice

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Une première méthode de calcul de M^n .

Soit la matrice $A = \frac{1}{4}(M - I)$.

- (a) Calculer A^2 , A^3 puis en déduire une expression simple de A^n pour tout entier $n \geq 1$.
- (b) Exprimer M en fonction de A et I , puis en déduire qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = I + u_n A.$$

- (c) Vérifier que la suite u est arithmético-géométrique. Calculer u_n en fonction de n .
En déduire l'expression de M^n pour $n \geq 0$.
- (d) Justifier que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} .
Vérifier que l'expression trouvée à la question précédente est encore valable avec $n = -1$.

2. Une seconde méthode de calcul de M^n .

On définit la matrice $J = \frac{1}{4}(M + 3I)$.

- (a) Calculer J^2 puis J^n pour tout entier naturel non nul n .
La matrice J est-elle inversible ?
- (b) Pour tout entier naturel n non nul : déterminer une expression de M^n en fonction de n , I et J . Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 1.c).