Devoir à la maison

Exercice 1. *Théorème de Rolle*

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Le théorème de Rolle affirme que si une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable à l'intérieur $]a;b[$ de cet intervalle vérifie $f(a)=f(b)$, alors $\exists c \in\ ]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.
2. Soit h une application de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, notons $x_1 < x_2 < ... < x_p$ ces p valeurs où h s'annule.
   Pour $1 \leq i \leq n-1$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ et l'on en déduit qu'il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $h'(y_i)=0$. Ceci nous donne $p-1$ valeurs distinctes pour lesquelles h' s'annule.
3. On considère les applications a et b de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
   $$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30}$$
   $$b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$
   On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0,+\infty[$. On remarque une primitive particulière de b, notée B :
   $$B(x) = 3x^{-50} + x^{-40} + 4x^{-20} + 2x^{-10} + 11$$
   En particulier, on remarque que $B(x) = a(x)x^{-30}$. Ainsi, si a s'annule p fois sur $]0,+\infty[$, alors B s'annule aussi p fois sur $]0,+\infty[$ et donc on sait d'après la question précédente que la fonction b s'annule au moins $p-1$ fois sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de l'énoncé entraine que $p-1 \leq 3$, c'est à dire $p \leq 4$ donc a ne s'annule pas plus de quatre fois.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < ..... < \alpha_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ un élément de $(\mathbb{R}^*)^n$ et f_n l'application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
   $$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}$$
   Démontrons par récurrence sur n que f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0,+\infty[$.
   Initialisation de la récurrence : pour $n=1$, une fonction f_1 de la forme $f_1(x) = \lambda_1 x^{\alpha_1}$ où $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ ne s'annule pas.
   Hérédité : Supposons le résultat vrai aux rang n, et considérons une fonction f_{n+1} de la forme : $f_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k}$, qui se factorise en $f_{n+1}(x) = x^{\alpha_1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_1}$.
   Supposons que f_{n+1} s'annule au moins p fois sur $]0,+\infty[$, alors on aura que $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_1}$ s'annule au moins p fois aussi, donc sa dérivée $g'(x) = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \lambda_k (\alpha_k - \alpha_1) x^{\alpha_k - \alpha_1 - 1}$ s'annule au moins $p-1$ fois.
   Comme cette dérivée est une somme de n puissances distinctes de x, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et l'on a $p-1 \leq n-1$ donc $p \leq n$ et la propriété est bien héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure qu'elle est vraie.
5. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ suivant : $P = X^{400} - 7X^{201} - 4X^{101} + 1$. Prouvons que P admet au plus 6 racines réelles : d'après la question précédente, on sait déjà que P s'annule au plus trois fois sur $]0,+\infty[$. Notons $Q = X^{400} + 7X^{201} + 4X^{101} + 1$, $Q(X) = P(-X)$ s'annule aussi au plus trois fois sur $]0,+\infty[$ donc P s'annule au plus trois fois dans $]-\infty, 0[$.
   Comme $P(0) \neq 0$, on voit que P s'annule au plus 6 fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est dérivable)*

1.
   (a) f est C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{2x}+1$ le sont, et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{2x}+1 \geq 1$.
   Calculons :
   $$f'(x) = \frac{e^x(e^2x+1) - 2e^{2x}e^x}{(e^{2x}+1)^2}$$
   $$f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$$
   Ainsi $f'(x) > 0$ si et seulement si $e^{2x} < 1$, c'est à dire pour $x < 0$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, f admet en 0 son maximum qui est $\frac{1}{2}$.

   (b) Comme on a pour tout x, $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ ne peut admettre que des solutions $x > 0$.
   Ainsi, on étudie la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F : x \mapsto f(x) - x$.

   F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, continue. On peut remarquer que $F(0) = \dfrac{1}{2}$, $F(1) < \frac{1}{2} - 1$ donc $F(1) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe $\ell \in [0,1]$ tel que $F(\ell) = 0$ donc $f(\ell) = l$. Ce nombre est unique par stricte décroissance de F.

   (c) On remarque que pour tout x, $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $f(\ell) \in [0, \frac{1}{2}]$ donc $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$ puisque $f(\ell) = \ell$.

   (d) On sait que pour tout réel x <u>positif</u> : $|f'(x)| = -f'(x)$.
   $$|f'(x)| = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2x}+1)}$$
   Or $e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$ et $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} < 1$ donc : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$, i.e. $|f'(x)| \leqslant f(x)$.

   On a déjà remarqué lors de l'étude des variations de f que pour tout x réel, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit que que $\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (e) $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ est d'autant plus vrai que $f(\mathbb{R}) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$ se démontre aisément par récurrence puisque $u_0 = 0$ et que l'intervalle $[0, \dfrac{1}{2}]$ est stable par f.
   L'initialisation est immédiate ($u_0 = 0$), et l'hérédité est évidente :
   $u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$ entraîne $f(u_n) \in [0, \dfrac{1}{2}]$ d'où $u_{n+1} \in [0, \dfrac{1}{2}]$.

   (b) Comme u_n et ℓ sont deux éléments de l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ où l'on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$, soit $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.

   On en déduit par récurrence que pour tout n entier : $0 \leq |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

   (c) La suite (u_n) converge donc vers ℓ puisque $|u_n - \ell| \to 0$ par encadrement.