Devoir à la maison

Exercice 1. *Théorème de Rolle*

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Enoncer le théorème de Rolle.
2. Soit h une application de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.
3. On considère les applications a et b de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30}$$

$$b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$

   On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0,+\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0,+\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < ..... < \alpha_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ un élément de $(\mathbb{R}^*)^n$ et f_n l'application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}$$

   Démontrer que f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0,+\infty[$.

5. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ suivant : $P = X^{400} - 7X^{201} - 4X^{101} + 1$. Prouver que P admet au plus 6 racines réelles.

Exercice 2. *Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est dérivable)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1.
   (a) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et etudier les variations de f.

   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ.

   (c) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$
   Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1.65 \pm 10^{-2}$ et $e \simeq 2.72 \pm 10^{-2}$

   (d) Montrer que pour tout réel x positif : $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant f(x)$ puis que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que $\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (e) Vérifier que $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

(c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.