Corrigé du devoir à la maison

1 Carrés magiques d'ordre 3.

Un carré est magique lorsque la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est identique. Cette somme est appelée **densité** du carré magique. L'ordre du carré correspond au nombre d'éléments d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Un carré d'ordre 3 contient huit rangées de trois éléments (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales). Le **médian** est l'élément du centre. Voici quelques exemples de tels carrés :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10	2	9
6	7	8
5	12	4

23	2	17
8	14	20
11	26	5

1. On considère les carrés de nombres suivant où x, y et z sont des nombres réels :

a)

2z	x+1	3y+7
5x-1	4y+1	z+7
3y+1	2z+3	2x+2

b)

x+1	y	z
2x	2y	2z
3x	3y	3z

Déterminer, pour chacun de ces deux carrés, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que le carré soit magique.

(a) Analyse : Soit (x, y, z) une solution. L'égalité des sommes des nombres de la première et la troisième ligne donne :

$$2z + x + 3y + 8 = 3y + 2z + 2x + 6.$$

On en déduit que $x = 2$, puis on écrit l'égalité des sommes des nombres de la première et la troisième colonne donne :

$$2z + 3y + 10 = 3y + z + 20.$$

On en déduit $z = 10$. Enfin, avec par exemple l'égalité des sommes des deux premières lignes, on obtient $y = 3$.

Synthèse : $(x, y, z) = (2, 3, 10)$ donne bien le carré magique

20	3	16
9	13	17
10	23	6

de densité 39.

(b) Analyse : Soit (x, y, z) une solution. L'égalité des sommes des deux dernières lignes donne $x+y+z = 0$ tandis que les deux premières donnent $x + y + z = -1$. Le problème n'a donc aucune solution et il n'existe pas de carré magique de cette forme.

2. On souhaite maintenant décrire l'ensemble de tous les carrés magiques d'ordre 3, on considère donc le carré suivant où a, b, c, d, e, f, g et h et i sont des inconnues réelles :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

(a) Écrire un système d'équations vérifiées par les inconnues si et seulement si le carré est magique. On écrit un système avec 7 équations : en effet, l'égalité de 8 nombres différents équivaut à 7 égalités puisque cela revient à dire que chacun des 7 premiers nombres est égal au dernier.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& g+e+c \\ d+e+f &=& g+e+c \\ g+h+i &=& g+e+c \\ a+d+g &=& g+e+c \\ b+e+h &=& g+e+c \\ c+f+i &=& g+e+c \\ a+e+i &=& g+e+c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b-e-g &=& 0 \\ -c+d+f-g &=& 0 \\ -c-e+h+i &=& 0 \\ a-c+d-e &=& 0 \\ b-c-g+h &=& 0 \\ -e+f-g+i &=& 0 \\ a-c-g+i &=& 0 \end{array}\right.$$

(b) Ecrire la matrice du système précédent, puis sa forme échelonnée réduite : on se contente de la matrice non augmentée, la dernière colonne de la matrice augmentée n'étant constituée que de 0 pour ce système qui est homogène.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&1&0&1&-1&0&0\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1\\1&0&-1&1&-1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\1&0&-1&0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

On soustrait la ligne 1 aux lignes 4 et 7 :

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&1&0&1&-1&0&0\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1\\0&-1&-1&1&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&-1&-1&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

On procède à l'échange $L_2 \leftrightarrow L_5$:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&0&-1&0&0\\0&1&-1&0&0&0&-1&1&0\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1\\0&-1&-1&1&0&0&1&0&0\\0&0&-1&1&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&-1&-1&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

On soustrait L_2 à L_1, et on l'ajoute à L_4 et L_7 :

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1&0&0&-1&0\\0&1&-1&0&0&0&-1&1&0\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1\\0&0&-2&1&0&0&0&1&0\\0&0&-1&1&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&0&-2&0&1&0&-1&1&1\end{pmatrix}$$

On ajoute L_3 à L_1, on la soustrait à L_2 et L_5 et on la soustrait deux fois à L_4 et L_7 :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&-1&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1\\0&0&0&1&2&0&0&-1&-2\\0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&0&0&0&3&0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

On soustrait L_4 à L_5 :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&-1&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1\\0&0&0&1&2&0&0&-1&-2\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&0&0&0&3&0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

On ajoute L_5 une fois à L_2, 2 fois à L_4 et 3 fois à L_7, on la soustrait 2 fois à L_1 et une fois à L_3 et L_6 :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-2&2&0&-1\\0&1&0&0&0&1&-2&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&1&1&0\\0&0&0&1&0&2&-2&-1&0\\0&0&0&0&-1&1&-1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&3&-4&-1&2\end{pmatrix}$$

On échange les deux dernières lignes et on multiplie l'avant dernière par $\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-2&2&0&-1\\0&1&0&0&0&1&-2&0&0\\0&0&1&0&0&1&-1&-1&0\\0&0&0&1&0&2&-2&-1&0\\0&0&0&0&1&-1&1&0&-1\\0&0&0&0&0&1&-\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Et on finit la réduction :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&0&1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&0&0&0&1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0&1&-\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(c) Préciser le rang du système, le nombre d'inconnues paramètres puis l'ensemble de ses solutions.
Le système est de rang 6, il y a 3 inconnues paramètres g, h et i. L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \frac{2}{3}g+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}i & \frac{2}{3}g-\frac{1}{3}h+\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}g+\frac{2}{3}h+\frac{2}{3}i \\ \hline -\frac{2}{3}g+\frac{1}{3}h+\frac{4}{3}i & \frac{1}{3}g+\frac{1}{3}h+\frac{1}{3}i & \frac{4}{3}g+\frac{1}{3}h-\frac{2}{3}i \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} \middle| (g,h,i)\in\mathbb{R}^3 \right\}$$

(d) Prouver enfin que dans un carré magique d'ordre 3, la densité est le triple du médian.
Il suffit d'observer le carré précédent, puisque tout carré magique d'ordre 3 est de cette forme. Son médian vaut $\frac{1}{3}(g+h+i)$ et sa densité est $g+h+i$.

2 Puissances d'une matrice

Un carré est magique lorsque la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est identique. Cette somme est appelée **densité** du carré magique. L'ordre du carré correspond au nombre d'éléments d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Un carré d'ordre 3 contient huit rangées de trois éléments (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales). Le **médian** est l'élément du centre. Voici quelques exemples de tels carrés :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10	2	9
6	7	8
5	12	4

23	2	17
8	14	20
11	26	5

1. On considère les carrés de nombres suivant où x, y et z sont des nombres réels :

a)

2z	x+1	3y+7
5x-1	4y+1	z+7
3y+1	2z+3	2x+2

b)

x+1	y	z
2x	2y	2z
3x	3y	3z

Déterminer, pour chacun de ces deux carrés, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que le carré soit magique.

2. On souhaite maintenant décrire l'ensemble de tous les carrés magiques d'ordre 3, on considère donc le carré suivant où a, b, c, d, e, f, g et h et i sont des inconnues réelles :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

(a) Écrire un système d'équations vérifiées par les inconnues si et seulement si le carré est magique.

(b) Ecrire la matrice du système précédent, puis sa forme échelonnée réduite.

(c) Préciser le rang du système, le nombre d'inconnues paramètres puis l'ensemble de ses solutions.

(d) Prouver enfin que dans un carré magique d'ordre 3, la densité est le triple du médian.

3 Puissances d'une matrice

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Une première méthode de calcul de M^n.

   Soit la matrice $A = \frac{1}{4}(M - I)$.

   (a) Calculer A^2, A^3 puis en déduire une expression simple de A^n pour tout entier $n \geq 1$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On observe alors que $A^n = (-1)^{n-1}A$. C'est vrai aux rangs $n = 1$ et $n = 2$. Si c'est vrai aux rangs $n-1$ et n, avec $n \geq 2$, on a donc $A^{n-1} = (-1)^{n-2}A$ or $A^2 = -A$ donc

$$A^{n-1}A^2 = (-1)^{n-2}A(-A)$$

$$A^{n+1} = (-1)^{n-1}A^2$$

$$A^{n+1} = (-1)^{n-1}(-A)$$

$$A^{n+1} = (-1)^n A$$

Cette propriété est donc héréditaire et vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Exprimer M en fonction de A et I, puis en déduire qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + u_n A.$$

On a $M^0 = I$ et $M^1 = 4A + I$ donc ceci est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 4$.
Supposons que c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I + u_n A$ donc :

$$M^{n+1} = M^n(I + 4A) = (I + u_n A)(I + 4A) = I + (u_n + 4)A + 4u_n A^2 = I + (u_n + 4)A - 4u_n A$$

$$M^{n+1} = I + (-3u_n + 4)A.$$

On a donc bien prouvé la propriété attendue au rang $n + 1$ avec $u_{n+1} = -3u_n + 4$.
La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Vérifier que la suite u est arithmético-géométrique. Calculer u_n en fonction de n. On vient de voir que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -3u_n + 4$$

On a donc pour $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = -3l + 4$, c'est à dire $l = 1$, que $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 donc :

$$u_n - 1 = (-3)^n(u_0 - 1)$$
$$u_n = 1 - (-3)^n$$

En déduire l'expression de M^n pour $n \geq 0$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

(d) Justifier que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait l'opération $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$ et l'échange $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ -7 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait les opérations de pivot $L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait les deux opérations de pivot $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{4}L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On réalise les opérations $L_3 \leftarrow -L_3$ puis $L_3 \leftrightarrow L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

On fait alors $L_3 \leftarrow \frac{4}{3}L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Et enfin les dernières opérations $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5}{4}L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $M \sim_L I_3$ donc M est inversible, d'inverse :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que l'expression trouvée à la question précédente est encore valable avec $n = -1$.

2. Une seconde méthode de calcul de M^n.

On définit la matrice $J = \frac{1}{4}(M + 3I)$.

(a) Calculer J^2 puis J^n pour tout entier naturel non nul n.

On constate que $J^2 = J$, et l'on en déduit par récurrence que $\forall n \geq 1, J^n = J$.

C'est vrai pour $n = 1$ ou $n = 2$, et si c'est vrai au rang $n \geq 2$, on a alors

$$J^{n+1} = J^2 J^{n-1} = JJ = J.$$

La propriété est donc vraie à tout rang $n \geq 1$.

La matrice J est elle inversible ?

Par l'absurde, si J était inversible d'inverse J^{-1}, on déduirait de $J^2 = J$ que $J^{-1}J^2 = J^{-1}J$ i.e. $J = I$. C'est une contradiction donc J n'est pas inversible.

(b) Pour tout entier naturel n non nul : déterminer une expression de M^n en fonction de n, I et J. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 1.c).

$M = 4J - 3I$, et les matrices $4J$ et $-3I$ commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I^{n-k};$$

$$M^n = (-3)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J;$$

$$M^n = (-3)^n I + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \ - (-3)^n \right) J.$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = (4-3)^n = 1$ donc :

$$M^n = (-3)^n I + (1 - (-3)^n) J.$$