Exercices d'arithmétique et Polynômes

1 Arithmétique

Exercice 1. *Congruences et critères de divisibilité en base 10*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si a et b sont dans $\mathbb{Z}$, la relation $a \equiv b[n]$ qui signifie $\exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = kn$ est équivalente à $n|(a-b)$.
   (a) Si $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ vérifient $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, montrer que l'on a alors : $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$.
   (b) Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifient $a \equiv b[n]$, montrer que l'on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $a^r \equiv b^r[n]$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$ dont l'écriture décimale est $m_l m_{l-1} \cdots m_1 m_0$ avec $m_i \in [\![0, 9]\!]$.
   (a) Justifier les règles habituelles pour déterminer si m est divisible par 2, par 5 ou par 3.
   (b) Montrer que $m \equiv m_0 - m_1 + m_2 \cdots + (-1)^l m_l[11]$, donner un critère de divisibilité par 11.
   (c) Donner enfin un critère de divisibilité par 7.

Exercice 2.

Déterminer les nombres qui s'écrivent en base 10 sous la forme $aabb$ et qui sont des carrés parfaits.

Exercice 3. *Nombres premiers*

Soit $p \geq 5$ un nombre premier.

1. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 6k + 1$ ou $p = 6k - 1$.
2. Montrer que $12|(p^2 - 1)$, puis que $24|(p^2 - 1)$.

Exercice 4. *Nombres à PGCD et PPCM fixés*

1. Soient a et b deux entiers naturels tels que $PGCD(a, b) = 15$ et $PPCM(a, b) = 3150$.
   Déterminer l'ensemble $E = \{a, b\}$.
2. Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $m|n$. A l'aide des décompositions de m et de n en produit de facteurs premiers, déterminer le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $PGCD(a, b) = m$ et $PPCM(a, b) = n$.

Exercice 5. *Formule $x^n - y^n$*

Soient $a \geq 2$ et $n \geq 1$ des entiers tels que $a^n + 1$ est premier. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 6. *Formule de Legendre*

1. Soit p un nombre premier et n un entier naturel, on note $E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.
   (a) Si $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre d'entiers de l'ensemble E_n qui sont divisibles par p^k à l'aide de la fonction partie entière.
   (b) Justifier le fait que $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$ vaut 0 pour tout k assez grand.

(c) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(i)$ la plus grande puissance de p qui divise i, c'est tout simplement la puissance à laquelle apparait p dans la décomposition de i. Expliquer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$ [1]

2. Applications :
   (a) Par combien de zéros se termine l'écriture de 2014! ?
   (b) Retrouver à l'aide de la formule de Legendre que les coefficients binomiaux sont des entiers, et si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, montrer :

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 7. *Petit théorème de Fermat*

Soit p un nombre premier.

1. Si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p \mid n^p - n$.
3. Si n n'est pas un multiple de p, montrer que cette relation est équivalente à : $p \mid n^{p-1} - 1$.

2 Polynômes

2.1 Exercices basiques

Exercice 8. *Calcul de la somme des carrés des entiers*

Trouver un polynôme P de degré 3 tel que $P(X) - P(X-1) = X^2$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Exercice 9. *En pratique !*

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 10. *Reste de la division euclidienne*

Déterminer le reste de la division euclidienne de

1. X^n par $X^2 - 3X + 2$, puis par $(X-1)^2$.
2. $(X \sin(\alpha) + \cos(\alpha))^n$ par $X^2 + 1$.

2.2 Equations fonctionelles et polynômes

Exercice 11. *Polynôme « périodique »*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X + a) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Exercice 12. *Solutions polynômiales d'une équation fonctionelle*

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.

1. NB : cette somme est finie dans la mesure où les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Exercice 13. *Solution polynômiale d'une équation fonctionelle*

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$.
Indication : considérer la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) = u_n$.

Exercice 14.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$. Calculer $P_n(k)$ pour $k \in \{1, ..., n\}$.
En déduire une factorisation de $P_n(X)$.

Exercice 15. *Deux dernières équations*

Trouver les éléments non nuls $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

1. $P(X^2) = P(X)^2$
2. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

(On pourra déterminer leurs racines complexes éventuelles).

2.3 Formule de Taylor, caractérisation de la multiplicité, factorisation par les racines.

Exercice 16. *Application directe de la formule de Taylor pour les polynômes*

Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(3) = 7, \quad P'(3) = -1, \quad P''(3) = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 3, \quad P^{(n)}(3) = 0.$$

Indication : prouver d'abord que P est de degré 2.

Exercice 17. *Polynôme absolument monotone sur un intervalle*

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(a) \geq 0$.
Montrer que P ne possède pas de racine dans $]a, +\infty[$.

Exercice 18. *Exercice similaire à celui du cours.*

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 vérifiant les deux conditions suivantes :

— $(X+2)^3$ divise $P(X) + 10$
— $(X-2)^3$ divise $P(X) - 10$.

Exercice 19. *Avec le théorème de Rolle*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.
3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que toutes les racines de P sont réelles.

Exercice 20. *Divisibilité et multiplicité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $(X-1)^2$ divise $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 21. *Divisibilité avec la décomposition en facteurs irréductibles*

Soit $P_n(X) = X^{2n} + X^n + 1$. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $P_1 | P_n$?
NB : les deux polynômes P_1 et P_n sont dans $\mathbb{R}[X]$, mais vérifier que $P_1 | P_n$ ne dépend pas du corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans lequel on travaille. En effet, l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne nous garantissent que ceux-ci sont identiques si l'on effectue la division de P_n par P_1 dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si $P_1 | P_n$ dans $\mathbb{C}[X]$, c'est aussi vrai dans $\mathbb{R}[X]$ puisque ceci signifie que le reste de la division euclidienne est nul.
Indications : Déterminer les racines de P_1, puis discuter selon le reste de la division euclidienne de n par 3.

Exercice 22. *Analyse-synthèse*

Préciser l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont multiples de leur polynôme dérivé.
Indication : on pourra par exemple montrer qu'un tel polynôme correspond à une fonction vérifiant une équation différentielle que l'on sait résoudre, puis déterminer alors les polynômes pouvant convenir.

Exercice 23. *Application de la décomposition dans $\mathbb{C}$ pour obtenir celle dans $\mathbb{R}$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^{2k}$ sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 24. *Racines n-ièmes de l'unité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Décomposer sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^{2n} - 2X^n \cos(\theta) + 1$.
Indication : Poser $y = x^n$ et déterminer sous forme polaire l'ensemble des racines de P.

Exercice 25. *Divisibilité et composition*

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P | B \circ P$. En déduire que $A | B$.
Indication : Écrire à priori la division euclidienne de A par B, puis composer par P.