Devoir à la maison

Polynômes de Tchebycheff

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geq 1,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Établir par récurrence la relation suivante pour tout nombre réel x :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

   (b) En déduire que $|T_n(u)| \leq 1$ pour $u \in [-1;1]$.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une décomposition de T_n en produit d'un réel et de polynômes unitaires de degré 1.
5. Montrer par une méthode de votre choix que T_n' est lui aussi scindé à racines simples si $n \geq 2$.
6. Pour $n \geq 2$, calculer les racines de T_n' à l'aide de la relation établie à la question 3, et donner une décomposition de T_n' en produit d'un réel et de polynômes unitaires de degré 1.
7. Question facultative : Soit n un entier, $n \geq 2$. Montrer que

   $$(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

   En déduire les coefficients de T_n.