
Programme des colles du 11/03 au 15/03

1. Arithmétique et Polynômes

- Divisibilité dans \mathbb{Z} , propriétés
- Division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$: existence et unicité du quotient $q \in \mathbb{Z}$ et du reste $r \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ t.q. $a = bq + r$.
- PGCD et PPCM, algorithme d'Euclide pour le PGCD
- Nombres premiers, définition, crible d'Eratosthène.
- Décomposition d'un entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers, diviseurs d'un entier, expression du PGCD et du PPCM à l'aide de la décomposition des deux entiers, produit du PGCD et du PPCM.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.
- Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.
- Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
- Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition.
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée.
- Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
- **Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$.**

Généralisation : Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P , alors $\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k) \mid P$.

Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.

- Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .
- Multiplicité d'une racine : définition.
- Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôme scindé dans le cas de racines multiples.
- Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
- Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
- Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

- Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
- Théorème de d'Alembert-Gauss.
- **Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.**

2. Analyse asymptotique

- Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
- Liens entre ces notions, propriétés de calcul.
- Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
- **Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.**
- Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
- Développement limité d'une somme (ou d'une combinaison linéaire).
- Développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit.
- Forme normalisée d'un développement limité.