

## Exercices d'analyse asymptotique

### 1 Calculs de développements limités.

#### Exercice 1.

Calculer les développements limités suivants :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 | 2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0 |
| 3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0     | 4. $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0        |
| 5. $(x^3 + 1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 | 6. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0            |

#### Exercice 2.

Calculer les développements limités suivants en 0.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3                          | 2. $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3                |
| 3. $\sqrt{1 + \sin(x)}$ à l'ordre 3                     | 4. $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3                         |
| 5. $(1+x)^x$ à l'ordre 4                                | 6. $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4                          |
| 7. $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2                  | 8. $\frac{x \ln(1+x) - e^{x^2} + 1}{x^2}$ à l'ordre 2 |
| 9. $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$ à l'ordre 2 | 10. $(x+1)^{x^2+2x}$ à l'ordre 6                      |

#### Exercice 3.

Calculer les développements limités suivants :

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2                       | 2. $\frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en $-2$                       |
| 3. $e^{\cos x \ln x}$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{3}$ | 4. $(1 + \cos x)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$ |

#### Exercice 4.

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0             | 2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0                  |
| 3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 | 4. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0. |

#### Exercice 5.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$ .

1. Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $F$ .
3. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $f$ .

#### Exercice 6.

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction  $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  soit de degré le plus grand possible.

### Exercice 7.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque sur  $\mathbb{R}$ .

Donner un développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 3 en 0.

### Exercice 8.

Soit  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .

1. Montrer que  $f$  est une fonction dérivable sur  $] -1, +\infty[$ .
2. Montrer que  $f$  est une bijection de  $] -1, +\infty[$  sur  $] 0, +\infty[$ .
3. On note  $g$  la fonction réciproque de  $f$ . Montrer que  $g$  possède un développement limité à l'ordre 2 au point 1 et calculer ce développement limité.
4. En déduire que le produit  $t \cdot g\left(\frac{t}{t-1}\right)$  a une limite finie, que l'on calculera, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 9.

Calculer, à l'ordre 100, le DL de  $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ .

## 2 Application au calcul de limites

### Exercice 10.

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$                                  | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \ln(1 + 2x)}$            |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$                    | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^3}$                   |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$  |
| 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos(x)}$                  | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3 - \sqrt[4]{2 + 80x^3 + 16x^4})$ |

### Exercice 11.

Déterminer les constantes  $a, b, c$  pour que

$$\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x} \text{ et } \frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}$$

tendent vers une limite finie quand  $x \rightarrow 0$ .

## 3 Application au prolongement par continuité

### Exercice 12.

On considère la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ .

Montrer qu'elle est prolongeable en fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $\tilde{f}$  cette fonction. Que vaut  $\tilde{f}(0)$  ?

La fonction  $\tilde{f}$  est-elle dérivable en 0 ?

### Exercice 13.

On considère la fonction définie pour  $x \in ]0, \pi[$  par

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}.$$

Déterminer le développement limité de  $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$  en 0 à l'ordre 4.

En déduire si la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

Si c'est le cas, ce prolongement par continuité est-il de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## 4 Application à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

### Exercice 14.

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x}(1-x) + 1$  et  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de  $f$  au voisinage de 0 est :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. En déduire une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de  $T$  par rapport à  $C_f$  au voisinage de ce point.
4. Dans un repère, tracer  $T$  et  $C_f$ .

### Exercice 15.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ . Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

### Exercice 16.

Prouver qu'au voisinage de  $+\infty$ , les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} f(x) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}} & \mathbf{2.} g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ \mathbf{3.} h(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(1/x)} & \mathbf{4.} u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) \end{array}$$

## 5 Développement asymptotique de suites implicites

### Exercice 17.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = |x \sin x|$ .

1. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution dans l'intervalle  $\left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ .  
On notera  $x_n$  cette solution.
2. Donner un équivalent simple de  $x_n$
3. On note  $y_n = x_n - n\pi$  de sorte que  $x_n = n\pi + y_n$ . Montrer que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ainsi définie est une suite convergente vers 0.
4. Donner un équivalent de  $y_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 18.

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $e^x + x - n = 0$ .

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera  $u_n$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .
3. Montrer que  $u_n \sim_{+\infty} \ln n$ .
4. En étudiant  $v_n = u_n - \ln n$ , montrer que

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$