Corrigé du devoir à la maison

Polynômes de Tchebycheff

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X)=1$, $T_1(X)=X$, puis la relation :

$$\forall n\geq 1,\ T_{n+1}(X)=2XT_n(X)-T_{n-1}(X).$$

1. On calcule : $T_2(X)=2X^2-1$, $T_3(X)=4X^3-3X$ et $T_4(X)=8X^4-8X^2+1$.
2. T_n est de degré n, son coefficient dominant est 2^{n-1}, la fonction associée est paire si n est pair, impaire sinon. Prouvons tout cela par récurrence : l'initialisation est évidente pour $n=1,2,3,4$ puisqu'il suffit de vérifier ces faits sur les polynômes calculés à la question précédente.

   Admettons donc toutes ces propriétés aux rangs $\leq n$ (où $n\geq 1$). La relation $T_{n+1}(X)=2XT_n(X)-T_{n-1}(X)$ nous permet de calculer le coefficient dominant de T_{n+1} puisque c'est celui de $2XT_n(X)$ qui est de degré $n+1$ par hypothèse de récurrence tandis que T_{n-1} est de degré $n-1$. Ce coefficient de degré $n+1$ est donc $2\times 2^{n-1}=2^n$. On observe en outre que la multiplication par X transforme un polynôme de fonction associée paire en un polynôme de fonction associée impaire et réciproquement. Ainsi, le polynôme $2XT_n(X)$ est de la parité contraire de T_n, de même que T_{n-1}. Ceci prouve que T_{n+1} est bien de la parité opposée par rapport à T_n et achève cette démonstration par récurrence.
3. (a) Établissons par récurrence la relation suivante pour tout nombre réel x :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ T_n(\cos(x))=\cos(nx)$$

   Pour $n=0$ ou $n=1$, la propriété est évidente. Admettons cette propriété aux rangs $\leq n$, on a alors au rang $n+1$:

   $$T_{n+1}(\cos(x))=2\cos(x)\cos(nx)-\cos((n-1)x)$$
   $$T_{n+1}(\cos(x))=2\cos(x)\cos(nx)-\cos(nx-x)$$
   $$T_{n+1}(\cos(x))=2\cos(x)\cos(nx)-\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x)$$
   $$T_{n+1}(\cos(x))=\cos(x)\cos(nx)-\sin(nx)\sin(x)$$
   $$T_{n+1}(\cos(x))=\cos(nx+x)=\cos((n+1)x).$$

   (b) Si $u\in[-1,1]$, $\exists\theta\in[0;\pi]$ tel que $u=\cos(\theta)$. Ainsi, $|T_n(u)|=|\cos(n\theta)|\leq 1$.
4. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, résolvons dans $[0,\pi]$ l'équation $T_n(\cos(x))=0$: elle est équivalente à $\cos(nx)=0$, c'est à dire $nx\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ ou encore $x\equiv\frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$. Ceci signifie que $x=\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}=\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Les solutions dans $[0,\pi]$ sont donc :

   $$\mathcal{S}=\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n},k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

   (b) De la question précédente, on déduit comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ que T_n a donc n racines réelles dans $[-1,1]$, et leur ensemble est :

   $$\mathcal{R}=\left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

   (c) On peut alors factoriser T_n par ses racines et son coefficient dominant, puisque c'est un polynôme simplement scindé :

   $$T_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

5. Pour cette cinquième question, on pouvait au choix utiliser le théorème de Rolle pour justifier que puisque T_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, il en est de même pour T_n' (exercice vu en cours), ou bien argumenter en disant que l'on calcule explicitement toutes les racines de T_n' dans la question suivante, et qu'il y en a bien $n-1$ distinctes alors que le degré de T_n' est $n-1$.
6. Lorsque l'on dérive la relation du 3.(a), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\sin(x)T_n'(\cos(x)) = -n\sin(nx)$$

Or l'équation $\sin(nx) = 0$ équivaut à $nx \equiv 0[\pi]$, c'est à dire $x \equiv 0[\frac{\pi}{n}]$. La relation ci-dessus nous garantit que si $\sin(x) \neq 0$ et que $x \equiv 0[\frac{\pi}{n}]$, alors $T_n'(\cos(x)) = 0$. On en déduit $n-1$ racines distinctes de T_n' :

$$\mathcal{R}' = \left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$$

On voit donc à nouveau que T_n' est scindé à racines simples. Son coefficient dominant se déduit de celui de T_n : c'est $n2^{n-1}$ et l'on peut finalement écrire :

$$T_n'(x) = n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

7. Soit n un entier, $n \geq 2$. Dérivons deux fois la relation obtenue au 3.(a) :

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

$$-\sin(x)T_n'(\cos(x)) = -n\sin(nx)$$

$$(-\sin(x))^2T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) = -n^2\cos(nx)$$

$$(1-\cos^2(x))T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2T_n(\cos(x)) = 0$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que le polynôme

$$(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X)$$

a une infinité de racines puisque la fonction cos prend toutes les valeurs entre -1 et 1, donc ce polynôme est nul.
Notons $p = E\left(\frac{n}{2}\right)$, on sait alors que T_n est de la forme :

$$T_n(X) = a_nX^n + a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-4}X^{n-4} + ... + a_{n-2p}X^{n-2p}$$

où $a_n = 2^{n-1}$. Calculant le coefficient de degré $n-2k$, $k \in [\![1, p]\!]$, du polynôme nul indiqué ci-dessus, on obtient :

$$(n-2k+2)(n-2k+1)a_{n-2k+2} - (n-2k)(n-2k-1)a_{n-2k} - (n-2k)a_{n-2k} + n^2a_{n-2k} = 0$$

Après simplification, on conclut :

$$a_{n-2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k(n-k)}a_{n-2k+2}$$

On démontre alors aisément par récurrence sur k que pour $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{n(n-1)...(n-2k+1)}{k!n(n-1)...(n-k)}a_n$$

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k2^{n-2k-1}n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$