Devoir à la maison

Exercice 1. *Développements limités*

1. Calculer les développements limités suivants en 0 :

$$\begin{array}{ll} \textbf{a)}\ \cos(x) - e^x \text{ à l'ordre 3} & \textbf{b)}\ 1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7 \text{ à l'ordre 3} \\ \textbf{c)}\ \ln(\cos(x)) \text{ à l'ordre 3} & \textbf{d)}\ (1+x)^x \text{ à l'ordre 4.} \end{array}$$

2. Calculer les développements limités suivants :

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2} \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{1+x^2} \text{ à l'ordre 3 en } -2$$

Exercice 2. *Application au calcul de limites*

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textbf{1.}\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} & \textbf{2.}\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)} \\ \textbf{3.}\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} & \textbf{4.}\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^3} \\ \textbf{5.}\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}\right) & \textbf{6.}\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} \end{array}$$

Exercice 3. *Deux méthodes pour un même développement*

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$, de partie régulière $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ; c'est à dire que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$

   (a) Montrer que l'application $x \mapsto f(x + x^2)$ admet en 0 un développement limité d'ordre n, expliquer comment l'on calcule la partie régulière de ce développement.

   (b) Application pratique : rappeler le développement limité à l'ordre n en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

   et calculer ainsi le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

   (c) Reprendre et prolonger le calcul du développement limité de g à l'ordre 7 en 0 en utilisant astucieusement la formule $(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$.

Exercice 4. *Etude d'une fonction en* 0

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f \; : \; x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
2. Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :
   — f est continue en 0 ?
   — f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
   — f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?
   (justifier avec soin les réponses)
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Etude d'une fonction en* $+\infty$

On note g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Dresser le tableau de variations complet de g.
2. Donner la limites de g en $+\infty$, l'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$, et la position de la courbe par rapport à son asymptote.
3. Préciser l'autre asymptote de la courbe $\mathcal{C}_g$, puis tracer la courbe et ses asymptotes.

Exercice 6. *Développement asymptotique de suite implicite*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = |x \sin x|$.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi ; n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. On notera x_n cette solution.
2. Donner un équivalent simple de x_n
3. On note $y_n = x_n - n\pi$ de sorte que $x_n = n\pi + y_n$. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est une suite convergente vers 0.
4. Donner un équivalent de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Plus difficile : donner un terme supplémentaire du développement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.