Programme des colles du 18/03 au 22/03

1. Arithmétique et Polynômes
   - Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, propriétés
   - Division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$: existence et unicité du quotient $q \in \mathbb{Z}$ et du reste $r \in [\![0, b-1]\!]$ t.q. $a = bq + r$.
   - PGCD et PPCM, algorithme d'Euclide pour le PGCD
   - Nombres premiers, définition, crible d'Eratosthène.
   - Décomposition d'une entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers, diviseurs d'un entier, expression du PGCD et du PPCM à l'aide de la décomposition des deux entiers, produit du PGCD et du PPCM.
   - L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.
   - Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.
   - Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
   - Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition.
   - Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée.
   - Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $K[X] \setminus \{0\}$.
   - Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$.
     Généralisation : Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P, alors $\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \big| P$.
     Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.
   - Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.
   - Multiplicité d'une racine : définition.
   - Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôime scindé dans le cas de racines multiples.
   - Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
   - Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
   - Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$:
     $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$
   - Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
   - Théorème de d'Alembert-Gauss.
   - **Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.**
2. Analyse asymptotique
   - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
   - Liens entre ces notions, propriétés de calcul.
   - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
   - **Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.**
   - Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0.
   - Développement limité d'une somme (ou d'une combinaison linéaire).
   - Développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit.
   - Forme normalisée d'un développement limité.
   - Développement limité d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
   - Développement limité d'une primitive
   - DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
   - Lien entre régularité d'une fonction et développement limité : contre exemple $f : x \mapsto x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right)$ prolongé par continuité en 0 d'une fonction qui admet en tout point un DL à l'ordre n avec f' qui n'est pas continue en 0.
   - Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).
   - Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Espaces vectoriels.
   - Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   - **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que $0x = 0_E$ si $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.**