Corrigé du devoir à la maison

Ce devoir à la maison est l'occasion de découvrir quelques applications majeures du théorème des accroissements finis et des développements limités à l'étude asymptotique des suites récurrentes.

1 Points fixes attractifs et répulsifs

Dans cette partie, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On considère une fonction $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour $x \in I$, on notera $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Soit $x_0 \in I$ tel que I contienne un voisinage de x_0 et $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f. En particulier, la suite $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à x_0.

1. Lorsque x_0 est un point fixe de f et que $|f'(x_0)| < 1$, on dit que x_0 est un point fixe attractif.
   (a) Si x_0 est un point fixe attractif de f, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < k < 1$ tels que :
   $$\forall x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\,,\ |f'(x)| \leq k.$$
   La fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est continue puisque f' l'est.
   On a donc $\lim_{x\to x_0} |f'(x)| = |f'(x_0)| < 1$ et l'on peut choisir $\epsilon = \frac{1-|f'(x_0)|}{2}$: on a alors par définition de la limite un nombre $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$ et $\forall x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, $|f'(x_0)| - \epsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \epsilon$. En particulier, en remplaçant ϵ par sa valeur, on obtient : $|f'(x)| < \frac{1+|f'(x_0)|}{2}$ donc on a bien $k = \frac{1+|f'(x_0)|}{2} < 1$ et $\alpha > 0$ vérifiant ce qui est demandé dans l'énoncé.
   (b) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'on a alors pour tout $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$: $|u_n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0|$.
   On montre ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, cette inégalité est une égalité et est vérifiée. Supposons qu'elle est vraie au rang n. On a alors $|u_n(x) - x_0| \leq k^n|x - x_0| \leq |x - x_0|$ donc $u_n(x_0) \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre x_0 et $u_n(x)$: on a donc $\left|\frac{f(u_n(x))-f(x_0)}{u_n(x_0)-x_0}\right| \leq k$ et donc $|u_{n+1}(x) - x_0| \leq k|u_n(x) - x_0| \leq k.k^n|x - x_0|$. Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On voit donc que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 lorsque $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ parce que la suite géométrique de raison $k < 1$ tend vers 0, expliquant le caractère attractif du point fixe x_0.
2. Lorsque x_0 est un point fixe de f et que $|f'(x_0)| > 1$, on dit que x_0 est un point fixe répulsif.

(a) Si x_0 est un point fixe répulsif de f, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $k > 1$ tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\,,\ |f'(x)| \geq k.$$

Ici, il faut reproduire le raisonnement de la question 1.(a) avec $\epsilon = \frac{|f'(x_0)|-1}{2}$ et l'on a ainsi un intervalle $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, $|f'(x_0)| - \epsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \epsilon$. En particulier, en remplaçant ϵ par sa valeur, on obtient : $1 < \frac{1+|f'(x_0)|}{2} < |f'(x)|$ donc on a bien $k = \frac{1+|f'(x_0)|}{2} > 1$ et $\alpha > 0$ vérifiant ce qui est demandé dans l'énoncé.

(b) Montrer qu'une suite $u_n(x)$ ne peut alors converger vers x_0 que si elle est constante et égale à x_0 à partir d'un certain rang.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in I$ tel que $u_n(x) \to x_0$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq x_0$. A partir d'un certain rang N, on a pour $n \geq N$, $u_n(x) \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$. On montre alors par récurrence que $|u_n(x) - x_0| \geq k^{n-N}|u_N(x) - x_0|$ pour $n \geq N$, où $k > 1$. Ceci est en contradiction avec la convergence de $u_n(x)$ vers x_0 si $u_N(x) \neq x_0$. Ainsi, une suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x_0 est constante à partir d'un certain rang.

2 La méthode de Newton

Soit g de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. On suppose que l'équation $g(x) = 0$ a une solution x_0 à l'intérieur de l'intervalle I, dont on ne connait pas la valeur exacte. La méthode de Newton consiste, partant d'une valeur u_0 proche de x_0, à tracer la tangente à la courbe de g en le point d'abscisse $x = u_0$. Cette tangente à $\mathcal{C}_g$ en le point d'abscisse u_0 croise l'axe des abscisses en un point u_1 à condition que $g'(u_0) \neq 0$, et l'on peut recommencer le même processus en remplaçant u_0 par u_1.

1. Exprimons en fonction de u_0, de g et de g' l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en le point d'abscisse $x = u_0$:
$$y - g(u_0) = (x - u_0)g'(u_0)$$
2. Le point d'intersection u_1 avec les abscisses de la tangente vérifie donc :
$$-g(u_0) = (u_1 - u_0)g'(u_0)$$
$$u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)}$$
Soit f la fonction définie par
$$f : x \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$
3. Si $g'(x_0) \neq 0$, cette fonction f est bien définie sur un voisinage $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ de x_0 où g' ne s'annule pas (encore une fois, il suffit de poser $\epsilon = \frac{|g'(x_0)|}{2}$ et appliquer la continuité de g' en x_0). Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, elle est dérivable de dérivée :
$$f'(x) = 1 - \frac{g'^2(x) - g(x)g''(x)}{g'^2(x)}$$
$$f'(x) = \frac{g(x)g''(x)}{g'^2(x)}$$
En particulier, on a $f'(x_0) = 0$ puisque $g(x_0) = 0$, et x_0 est donc un point fixe attractif de f.

4. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi vers x_0 pour tout x dans un intervalle ouvert centré sur x_0 d'après la question 1 de la partie 1.

3 Vitesse de convergence vers un point fixe super-attractif

On reprend dans cette dernière partie les notations et hypothèses de la première partie, et l'on suppose que x_0 est un point fixe super-attractif de f, c'est à dire que $f(x_0) = x_0$ et $f'(x_0) = 0$.

1. Le but de cette question est de montrer que si $q > 0$ et que $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, on aura à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$, $|u_n(x) - x_0| \leq q^n$
   (a) Par continuité de la fonction f' en x_0, on a pour $\epsilon = \frac{q}{2}$ un intervalle $]x_0 - \beta; x_0 + \beta[$ où $\beta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[\,,\ |f'(x)| \leq \frac{q}{2}.$$
   (b) On a alors d'après la question 1.b de la première partie :
   $$|u_n(x) - x_0| \leq |x - x_0| \left(\frac{q}{2}\right)^n = \frac{|x - x_0|}{2^n} q^n.$$
   On choisit alors N de sorte que $|x - x_0| \leq 2^N$ et l'on obtient ainsi le résultat attendu.
2. Dans cette question, on suppose que f admet un développement limité d'ordre 2 en le point x_0.
   (a) Puisque f est dérivable de dérivée nulle en x_0 et qu'elle admet un $DL_2(x_0)$, ce développement limité est de la forme :
   $$f(x) =_{x\to x_0} x_0 + a(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$
   $$\frac{f(x) - x_0}{(x - x_0)^2} =_{x\to x_0} a + o\,(1)$$
   On pose alors $\epsilon = 1$ dans la définition de la limite, sachant que $\frac{f(x)-x_0}{(x-x_0)^2}$ a pour limite a en le point x_0. On a alors pour $K = |a| + 1 > 0$, un nombre $\delta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\,,\ |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2$$
   Si l'on choisit $\gamma = \min\{\delta, \dfrac{1}{K}\}$, on a finalement :
   $$\forall x \in]x_0 - \gamma; x_0 + \gamma[\,,\ |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2 \leq |x - x_0|.$$
   (b) Montrons par récurrence que l'on a pour tout $x \in]x_0 - \gamma; x_0 + \gamma[\,,\ n \in \mathbb{N}$:
   $u_n(x) \in]x_0 - \gamma; x_0 + \gamma[$ et $|u_n(x) - x_0| \leq \frac{1}{K}|K(x - x_0)|^{2^n}$.
   Pour $n = 0$, le résultat est évident. Admettons le résultat au rang n et appliquons le résultat de la question précédente puisque $u_n(x) \in]x_0 - \gamma; x_0 + \gamma[$:
   $$|f(u_n(x)) - x_0| \leq K|u_n(x) - x_0|^2 \leq |u_n(x) - x_0|$$
   $$|u_{n+1}(x) - x_0| \leq K\left(\frac{1}{K}|K(x - x_0)|^{2^n}\right)^2 \leq |u_n(x) - x_0|$$
   $$|u_{n+1}(x) - x_0| \leq \frac{1}{K}|K(x - x_0)|^{2^{n+1}} \leq |u_n(x) - x_0|$$
   Ce qui prouve bien que $u_{n+1}(x_0) \in]x_0 - \gamma; x_0 + \gamma[$ et l'inégalité souhaitée au rang $n + 1$.