Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Développements limités*

1. Calculer les développements limités suivants en 0 :

$$\textbf{a)}\ \cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\textbf{b)}\ 1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - 3x^3 + o(x^3)$$

$$\textbf{c)}\ \ln(\cos(x))$$

On commence par écrire :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

On écrit alors le développement limité du ln en 1 :

$$\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Pour $y(x) = \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, on a donc $y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $y(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ d'où :

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} y(x) - \frac{y(x)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\textbf{d)}\ (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$$

Or $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$.
On pose alors $y(x) = x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))$ et l'on a :

$$y^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4)$$

On obtient alors par composition :

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

2. Calculer les développements limités suivants :

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}$$

On pose $x = 2 + h$ et l'on se ramène ainsi au développement limité en 0 de :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{h}{2}}$$

Or $\sqrt{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$, d'où :

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}h - \frac{1}{32}h^2 + \frac{1}{128}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + o(h^3)$$

b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en -2

On pose $x = -2+h$ et l'on se ramène au développement limité en 0 de :

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} = \frac{1}{5-4h+h^2} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}h+\frac{1}{5}h^2}$$

On rappelle que $\frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)$, on en déduit avec $y(h) = -\frac{4}{5}h + \frac{1}{5}h^2$:

$$y^2(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{16}{25}h^2 - \frac{8}{25}h^3 + o(h^3)$$

$$y^3(h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{64}{125}h^3 + o(h^3)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{5}h - \frac{1}{5}h^2 + \frac{16}{25}h^2 - \frac{8}{25}h^3 + \frac{64}{125}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5} + \frac{4}{25}h + \frac{11}{125}h^2 + \frac{24}{625}h^3 + o(h^3)$$

Exercice 2. *Application au calcul de limites*

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
2. $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - 1 + o(x^2)$ donc $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
   $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y$ donc $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $x\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$.
   On a donc $\frac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$.
3. $$sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$$
   $$\sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
   Ainsi, $\sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$ et $\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.
4. $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x$ donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
   Ainsi, $\frac{\ln(1+x)-x}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$. Cette expression admet donc pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, et $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Elle n'a pas de limite en 0.
5. $$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))$$
   $$\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} x^2(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))$$
   $$\sin^2 x - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{3}$$
   Or $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ d'où $x^2\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et :
   $$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}.$$

6.
$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln(\cos\frac{1}{x})\right)$$

Or $\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\cos y \underset{y\to 0}{=} 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ d'où :

$$\cos\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{=} 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Puisque $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y$, on en déduit :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}$$
$$x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Exercice 3. *Deux méthodes pour un même développement*

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$, de partie régulière $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ; c'est à dire que :
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$
   (a) Quand x tend vers 0, $x + x^2$ tend aussi vers 0 et l'on a $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$, d'où $o((x+x^2)^n) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, donc on peut affirmer :
$$f(x+x^2) \underset{x\to 0}{=} P(x+x^2) + o(x^n).$$
   $x \mapsto f(x+x^2)$ admet donc en 0 un développement limité d'ordre n, dont on calcule la partie régulière en éliminant les termes de degré supérieur strictement à n du polynôme $P(X+X^2)$.

   (b) Application pratique : rappelons le développement limité à l'ordre n en 0 de :
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n).$$
   Calculons ainsi le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction
$$g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + o(x^4)$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + o(x^4)$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$$

   (c) Reprenons le calcul du développement limité de g en 0 en utilisant la formule $(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$:
$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3}$$
   Or on sait que :
$$\frac{1}{1-y} \underset{y\to 0}{=} 1 + y + y^2 + O(y^3)$$
   et l'on en déduit :
$$\frac{1}{1+x+x^2} \underset{x\to 0}{=} (1-x)(1 + x^3 + x^6 + O(x^9))$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + o(x^7)$$

Exercice 4. *Etude d'une fonction en 0*

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f \;:\; x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)$$

On sait que $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, et l'on peut composer les DLs :

$$\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2+o(x^2)$$

2. Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :
   — f est continue en 0 ?
   — f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
   La réponse à ces deux premières questions est affirmative : il est équivalent d'être dérivable en 0 et d'admettre un $DL_1(0)$. Ainsi, f est dérivable donc continue en 0, et l'on peut déterminer la valeur $f'(0) = \frac{1}{2}$.
   — f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$? En revanche, l'existence d'un $DL_2(0)$ ne nous dit rien quand à la dérivabilité de f à l'ordre 2 : il existe en effet des fonctions qui admettent un $DL_2(0)$ mais qui ont une dérivée qui n'est pas continue en 0 (exemple : $x \mapsto x^3\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$).
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc elle est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$. En 0, on a vu que f est continue et dérivable : il ne reste plus qu'à prouver la continuité de f' en 0. Calculons :

$$f'(x) = \frac{\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

On observe alors que le dénominateur de cette expression est équivalent quand x tend vers 0 à x^2, il faut donc réaliser un $DL_2(0)$ du numérateur pour prouver la continuité de f' :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x(1+x+o(x))-1-x-\frac{x^2}{2}+1+o(x^2)}{x(1+x+o(x)-1)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

Ainsi, $f'(x)$ admet pour limite $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0, d'où l'on déduit la continuité de f' en 0.

Exercice 5. *Etude d'une fonction en $+\infty$*

On note g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Dresser le tableau de variations complet de g. On commence par calculer la dérivée de g qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = e^{\frac{1}{x}} - (x+1)\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(x^2-x-1)$$

Ainsi g' est du même signe que le trinôme $t(x) = x^2-x-1$. Ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Il est donc de signe négatif sur $\left]0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ et positif sur $\left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$2e$	↗ $+\infty$

2. En $+\infty$, puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut faire un développement asymptotique de $e^{\frac{1}{x}}$:

$$e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

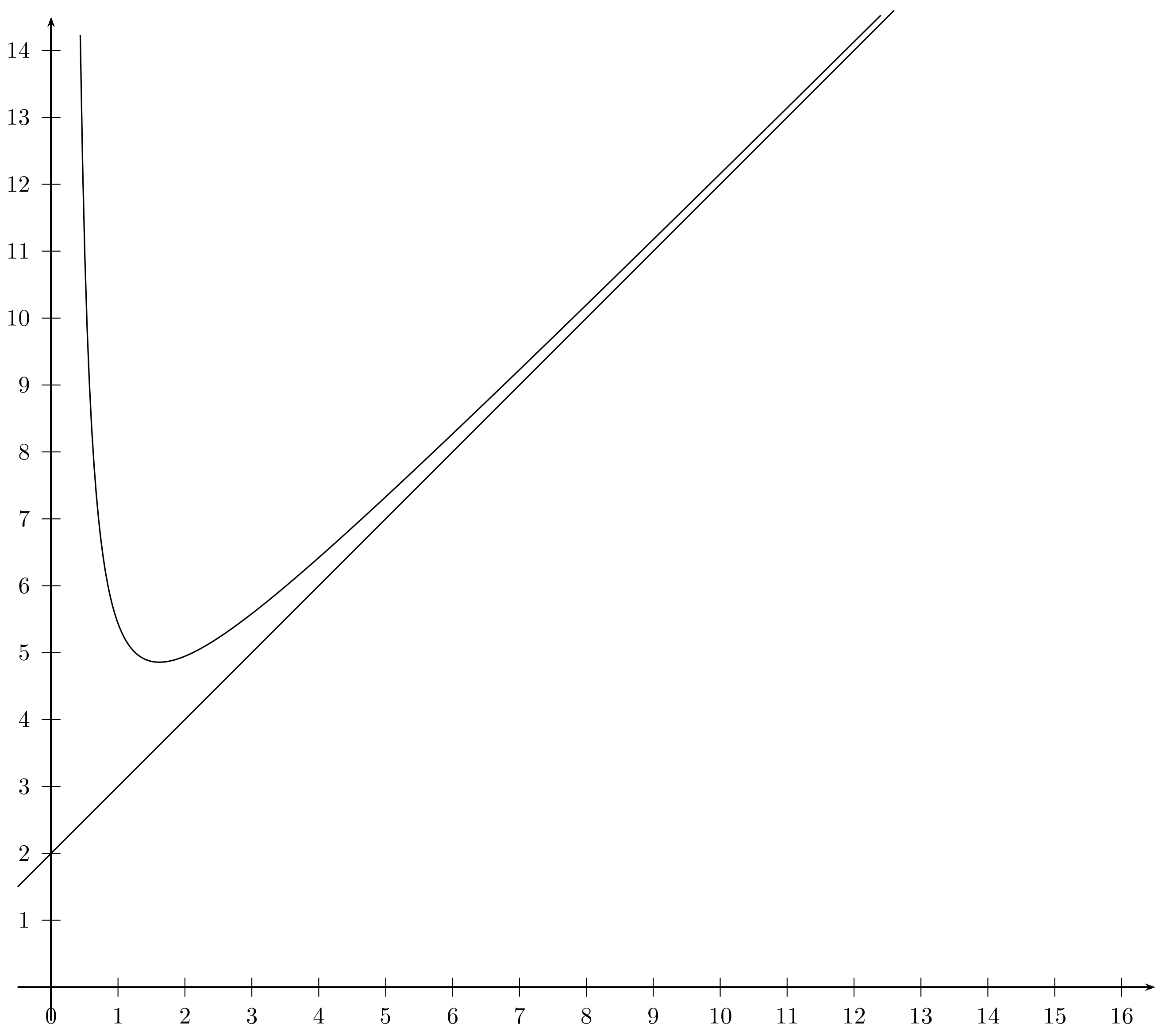
On en déduit le développement asymptotique de g :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, $\mathcal{C}_g$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + 2$, elle est située au dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\frac{3}{2x} > 0$ si $x > 0$.

3. L'autre asymptote de la courbe $\mathcal{C}_g$ est la droite verticale d'équation $x = 0$ puisque la fonction g tend vers $+\infty$ en 0.



Exercice 6. *Développement asymptotique de suite implicite*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = |x \sin x|$.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On notera x_n cette solution.
   Le plus simple est de remarquer que la fonction $x \mapsto |\sin x|$ est périodique de période π. Ainsi, elle se comporte de la même façon sur l'intervalle $\left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ que sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ où elle coincide avec le sinus. En particulier, elle est strictement croissante. Comme $f(x) = x|\sin x|$ sur les intervalles considérés, f est le produit de deux fonctions positives et strictement croissantes donc elle est strictement croissante.
   Enfin, $f(n\pi) = 0 < 1$ et $f(n\pi + \frac{\pi}{2}) = n\pi + \frac{\pi}{2} > 1$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle considéré.

2. On remarque que $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $1 < \frac{x_n}{n\pi} < \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{n\pi}$. Par encadrement, on en déduit que $\frac{x_n}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.
3. On note $y_n = x_n - n\pi$ de sorte que $x_n = n\pi + y_n$.
   L'équation se traduit par : $x_n|\sin(n\pi + y_n)| = 1$ donc $|\sin(y_n)| = \frac{1}{x_n}$, c'est à dire $\sin(y_n) = \frac{1}{x_n}$ car $y_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On obtient alors $y_n = \arcsin\left(\frac{1}{x_n}\right)$. Puisque $\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. La partie principale du développement limité de la fonction Arcsinus en 0 donne l'équivalent $\arcsin x \underset{x\to0}{\sim} x$ donc on a d'après la relation précédente $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n}$ i.e. $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$
5. Plus difficile : donner un terme supplémentaire du développement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On écrit $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n$ où $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\pi}\right)$. L'équation vérifiée par z_n est :

$$\left(n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n\right)\sin\left(\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = 1$$

   Or $\sin\left(\frac{1}{n\pi} + z_n\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} + z_n - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n\pi} + z_n\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n\pi} + z_n - \frac{1}{6(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Donc : $\left(n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n\right)\left(\frac{1}{n\pi} + z_n - \frac{1}{6(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1.$

$$1 + n\pi z_n - \frac{1}{6(n\pi)^2} + \frac{1}{(n\pi)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$$

$$n\pi z_n = -\frac{5}{6(n\pi)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$z_n = -\frac{5}{6(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$