Exercices sur les espaces vectoriels.

1 Espaces et sous-espaces

Exercice 1. *Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$*
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$;
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

Exercice 2. *Sous-espaces de polynômes et de fonctions*
Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 2\}$;
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A|P\}$;
4. $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathcal{D}$.
6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathcal{D}$.

Exercice 3. *Sous-espaces de polynômes et de fonctions*
On se place dans $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$.

1. Soit
$$H = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A|x|\right\}.$$
Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit
$$F = \left\{ P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^{2k} \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, (a_0, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}.$$
L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4. *Combinaisons linéaires*
Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$;
3. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 5. *Coïncidence*

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 0)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Vect}\big((2,3,-1),(1,-1,-2)\big) = \mathrm{Vect}\big((3,7,0),(5,0,-7)\big)$

Exercice 6. *Plus théorique*
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose $G \subset H$, $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$. Montrer que $G = H$.

Exercice 7. *Juste une inclusion*
Soient F, G et H trois sev de $\mathbb{K}^n$. Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$ (préciser s'il y a l'un des deux s.e.v. ci-dessus qui est inclus dans l'autre, montrer que l'inclusion réciproque est parfois fausse à l'aide d'un contre exemple).

Exercice 8. *Révision du cours sur les polynômes*
E est le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}[X]$ et A est un élément de E de degré $n \in \mathbb{N}^*$; F est l'ensemble des éléments de E divisibles par A. Montrer que F est un sev de E et en donner un supplémentaire simple.

Exercice 9. *Fonctions affines, et plus si affinités*
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Soit $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) |\ f(0) = f(1) = 0\}$; montrer que G est un sev de E et en donner un supplémentaire. (Indication : titre de l'exercice)
3. Plus généralement, soient $a_0, \ldots, a_N$ des éléments distincts de $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in E;\ f(a_0) = \cdots = f(a_N) = 0\}$. Trouver un supplémentaire à G.

Exercice 10. *Transformer une somme en somme directe*
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F' \oplus G = E$.

2 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 11. *Familles libres de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$*

1. On se place dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$. A quelle condition sur z la famille $(z, \bar{z})$ est-elle libre ?
2. Dans $\mathbb{R}^2$ la famille $((1,2),(3,5))$, est-elle libre ?
3. Dans $\mathbb{R}^3$ la famille (u, v) avec $u = (1,2,3)$ et $v = (-1,4,6)$ est-elle libre ?
4. Dans $\mathbb{R}^3$ la famille (u, v, w) avec $u = (1,2,-1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (-1,2,-3)$ est-elle libre ?
5. Dans $\mathbb{R}^4$ la famille (u, v, w, z) avec $u = (1,2,3,4)$, $v = (5,6,7,8)$, $w = (9,10,11,12)$ et $z = (13,14,15,16)$ est-elle libre ?
6. Dans $\mathbb{C}^4$ (vu cette fois-ci comme $\mathbb{C}$-e.v.), la famille : $((2,i,4,-i),\ (i,-1,-i,1),\ (0,3,-i,1))$ est-elle libre ?

Exercice 12. *Complétion de familles libres*
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,-1,1),\ v_2 = (2,-2,2),\ v_3 = (2,-1,2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 13. *Famille de polynômes*
Dans $\mathbb{R}[X]$, pour quelles valeurs de n la famille $(X^2, (X-1)^2, \dots, (X-n)^2)$ est-il libre ?

Exercice 14. *Liberté de familles de polynômes*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Montrer que la famille :
$$(X-a)^n,\ (X-a)^{n-1}(X-b), \dots,\ (X-a)(X-b)^{n-1},\ (X-b)^n$$
est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $c_1, \dots, c_{n+1}$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Montrer que
$$((X-c_i)^n)_{1 \leq i \leq n+1}$$
est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15. *Familles libres de fonctions*
Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$, où $f_a : x \to e^{ax}$, est libre.
2. Montrer que la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $g_n : x \to \cos(nx)$, est libre.
3. Montrer que la famille $(h_a)_{a \in \mathbb{R}}$, où $h_a : x \to |x-a|$, est libre.
4. Montrer que la famille $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $k_n : x \to \sin^n(x)$, est libre.

Exercice 16. *Famille libre issue d'une famille libre*
Soient x, y, z des vecteurs de K^n linéairement indépendants. Montrer que
$$(x+y, y+z, z+x)$$
forme une famille libre.

Exercice 17. *Famille à paramètre*
Pour quelles valeurs de m la famille
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
est-elle libre ?

Exercice 18. *Famille libre de Vandermonde*
Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose :
$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} {a_0}^2 \\ {a_1}^2 \\ \vdots \\ {a_{n-1}}^2 \end{pmatrix},\ v_{n-1} = \begin{pmatrix} {a_0}^{n-1} \\ {a_1}^{n-1} \\ \vdots \\ {a_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que $(v_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de K^n.

Exercice 19. *Espace vectoriel engendré*
Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u,v) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(w,t)$ dans les deux cas suivants :

1. $u = (1,2,3), v = (2,-1,1), w = (1,0,1), t = (0,1,1)$,
2. $u = (2,3,-1), v = (1,-1,-2), w = (3,7,0), t = (5,0,-7)$.

Exercice 20. *Premiers exemples de bases*
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (-1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (1,1,-1)$.

1. Vérifier qu'ils forment une base.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.
3. Mêmes questions avec les vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (2,3,1)$, $w = (3,1,2)$.

Exercice 21. *Sous-espaces définis par des équations*

1. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0 \text{ et } 2x-y+z = 0.\}$ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 |\ x-2y+z+t = 0 \text{ et } 2x+y-z+t = 0\}$. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^4$. Déterminer une base de F.
3. Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y+2z-3t = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Exercice 22. *Bases de $\mathbb{K}_n[X]$*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille :
$$\big(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\big)$$
est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ dans K deux à deux distincts. On pose, pour $1 \leq i \leq n$:
$$L_i(X) = \frac{1}{\prod_{k\neq i}(a_i - a_k)} \prod_{k \neq i}(X - a_k).$$
Montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $K_{n-1}[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

3 Dimensions d'espaces vectoriels

Exercice 23. *Rang de familles de vecteurs*

1. Trouver le rang, dans $\mathbb{R}^3$, de la famille :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
2. Trouver le rang, dans $\mathbb{R}^4$, de la famille :
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver le rang dans $\mathbb{C}[X]$ de la famille :

$$(X^2+X+1,\ X^2+3X+1,\ 2X,\ X^3+3).$$

Exercice 24. *Sous espaces définis par des équations*
On se place dans $\mathbb{R}^5$. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Donner pour chacun d'eux une base ainsi que la dimension.

1. $E_1 = \{(x_1,\dots,x_5)\in\mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_3,\ x_4 - x_2 + x_5 = 0\}$,
2. $E_2 = \{(x_1,\dots,x_5) \mid x_1 = -x_3,\ x_4 = 2x_1,\ x_2 = -x_5\}$.

Exercice 25. *Sous espaces définis par des équations et leur intersection*
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels : $S = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-y+z-t=0\}$ et $T = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\}$. Donner une base de S, de T et de $S\cap T$ ainsi que les dimensions de ces sous-espaces vectoriels.

Exercice 26. *Dimension de sous-espaces de polynômes*

1. Soient $n\geq 2$ et $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(0)=P(1)=0\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$, en donner une base ainsi que sa dimension.
2. Soient $n\geq 2$ et $G=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(0)=P(1)=P'(1)=0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$, en donner une base ainsi que sa dimension.

Exercice 27. *Intersection de sous-espaces*
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que $F\cap G\neq\{0\}$.

Exercice 28. *Sont-ils supplémentaires ?*
Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F=\{(a,a,a)\in\mathbb{R}^3,\ a\in\mathbb{R}\} \text{ et } G=\{(b+c,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ b,c\in\mathbb{R}\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 29. *Supplémentaire d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ défini par une équation*
Soit F l'ensemble des x de $\mathbb{R}^n$ (avec $n\geq 2$) de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique et vérifiant : $x_1+\cdots+x_n=0$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^n$.
2. Trouver $y\in\mathbb{R}^n\setminus F$.
3. Montrer que la droite vectorielle engendrée par y est un supplémentaire de F ; en déduire la dimension de F.
4. Trouver une base de F.

Exercice 30. *Décomposition en somme directe selon un hyperplan et une droite vectorielle*
Soient E un K espace vectoriel de dimension n, H un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ (hyperplan) et D un sous espace vectoriel de dimension 1 (droite).
On suppose $D\not\subset H$. Montrer que $H\oplus D=E$.

Exercice 31. *Espace engendré par le complémentaire d'un s.e.v.*
Soit F un sous-espace strict de $\mathbb{R}^n$. Que dire de Vect $(\mathbb{R}^n\setminus F)$?

Exercice 32. *Sous-espaces et intersection d'hyperplans*
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n. Que dire de la dimension de $H_1 \cap H_2$?
Généraliser à l'intersection de k hyperplans H_1, H_2, $\cdots$, H_k :

$$\text{Dim}\,(\,H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k) \quad \geq \quad n-k$$

Réciproquement, si F est un s.e.v. de E de dimension k, sauriez-vous prouver qu'il existe $n-k$ hyperplans H_1, $H_2, \cdots$, H_{n-k} tels que $F = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n-k}$?

Exercice 33. *Sous-espace de fonctions de dimension infinie, admettant une droite pour supplémentaire*
Soit

$$F = \left\{ f \in C^0\left([0,1], \mathbb{R}\right),\ \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathcal{F}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$.
2. Trouver une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vecteurs distincts (i.e, une suite de fonctions) de F linéairement indépendants, afin de prouver que F est un sous-espace vectoriel de dimension infinie.
3. Donner un supplémentaire de F dans $\mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$.

Exercice 34. *Réunion finie de s.e.v.*
Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n (avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une famille infinie $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ est dite en *position générale* si et seulement si toute sous-famille de $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cardinal n est une base de E.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $\alpha \in K$, on pose :

   $$v_\alpha = e_1 + \alpha e_2 + \cdots + \alpha^{n-1} e_n.$$

   Montrer que $(v_\alpha)_{\alpha \in K}$ est en position générale.
   (Indication : voir exercice 18).
2. Montrer que E n'est pas réunion finie d'hyperplans.

Exercice 35. *Supplémentaire dans un espace vectoriel*

1. Existence d'un supplémentaire commun.
   Dans cette première sous-partie, on se donne un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur le corps K (avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) et deux sous-espaces A et B de même dimension $r \in \mathbb{N}$. Le but est de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel S tel que $S \oplus A = S \oplus B = E$.
   (a) Si $r = n$, quel est le seul supplémentaire possible de A et de B ?
   (b) Si $r = n-1$, prouver que $A \cup B \neq E$. Soit alors $x \in E \setminus (A \cup B)$, montrer que $S = \text{Vect}(x)$ est sun supplémentaire commun de A et de B.
   (c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leq n$, tel que le résultat suivant soit vrai : si $\dim A = \dim B = r$, alors il existe un sous-espace S de dimension $n-r$ qui est un supplémentaire de A et de B. Montrer que le résultat est vrai aussi lorsque $\dim A = \dim B = r-1$.
2. Existence d'une infinité de supplémentaires.
   Dans cette deuxième sous-partie, on travaille toujours avec un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$ sur le corps K (avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) et un sous-espace A de dimension $r \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que A est un ensemble infini.
   (b) Si $r = n-1$, soit $x \in E \setminus A$. Pour tout $a \in A$, montrer que $V_a = \text{Vect}(x+a)$ est un supplémentaire de A. Montrer ensuite que $V_a \neq V_{a'}$ si a et a' sont deux éléments distincts de A et conclure quant au nombre de supplémentaires possibles de A.
   (c) Si $1 \leq r < n-1$, considérons un supplémentaire S de A et une base $(s_1, s_2, ..., s_{n-r})$ de S. Pour tout $a \in A$, montrer que $S_a = \text{Vect}(s_1 + a, s_2, s_3, ..., s_{n-r})$ est un supplémentaire de A. Montrer ensuite que $S_a \neq S_{a'}$ si a et a' sont deux éléments distincts de A et conclure quant au nombre de supplémentaires possibles de A.