
Programme des colles du 25/03 au 29/03

1. Arithmétique et Polynômes
 - Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.
 - Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
 - Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition.
 - Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
 - Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$. Généralisation :
Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P , alors $\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k) \mid P$. Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.
 - Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .
 - Multiplicité d'une racine : définition.
 - Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôme scindé dans le cas de racines multiples.
 - Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
 - Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
 - Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
 - Théorème de d'Alembert-Gauss.
 - Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2. Analyse asymptotique
 - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
 - Liens entre ces notions, propriétés de calcul.
 - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
 - Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
 - Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
 - Développement limité d'une somme (ou d'une combinaison linéaire).
 - Développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit.
 - Forme normalisée d'un développement limité.
 - Développement limité d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
 - Développement limité d'une primitive
 - DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
 - Lien entre régularité d'une fonction et développement limité : contre exemple $f : x \mapsto x^{n+1} \sin(\frac{1}{x^n})$ prolongé par continuité en 0 d'une fonction qui admet en tout point un DL à l'ordre n avec f' qui n'est pas continue en 0.
 - Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).
 - Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Espaces vectoriels.
 - Définition d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
 - **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que $0x = 0_E$ si $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.**
 - Exemples de référence : \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 - **Sous-espaces d'un \mathbb{K} -espace vectoriel : connaître trois caractérisations et savoir prouver qu'elles sont équivalentes.**
 - Intersection de sous-espaces vectoriels.
 - Union de sous-espaces vectoriels F et G : ce n'est un s.e.v. que lorsque $F \subset G$ ou $G \subset F$.
 - Familles de vecteurs, combinaisons linéaires
 - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.
 - Famille libre, famille liée.
 - Bases et coordonnées.
 - Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 - Somme de deux sous-espaces vectoriels.
 - **Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.**
 - Sous-espaces supplémentaires.